

516.7
K81s

Sammlung Schubert LXII

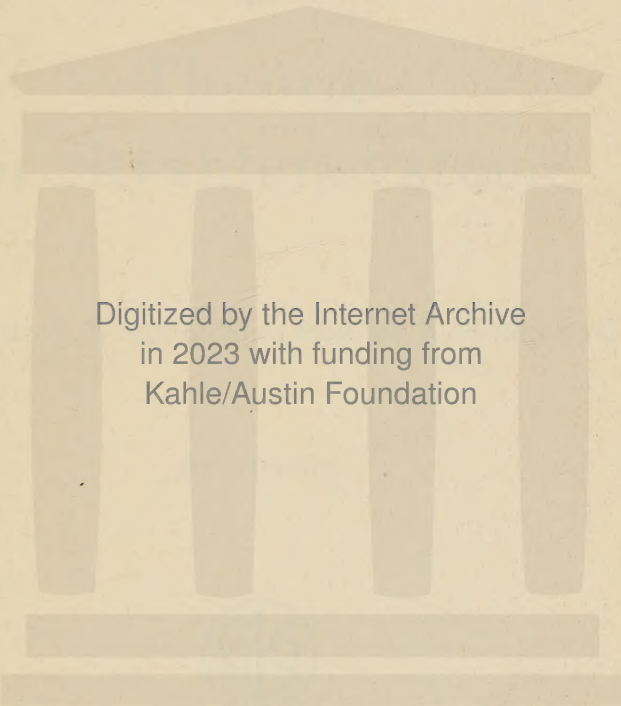
Spezielle Flächen
und
Theorie
der Strahlensysteme

von

Rektor Dr. V. Kommerell

und

Prof. Dr. K. Kommerell



Digitized by the Internet Archive
in 2023 with funding from
Kahle/Austin Foundation

Sammlung Schubert LXII

Spezielle Flächen
und
Theorie
der Strahlensysteme

von

Rektor Dr. V. Kommerell und **Prof. Dr. K. Kommerell**
in Nürtingen in Stuttgart

Mit 9 Figuren

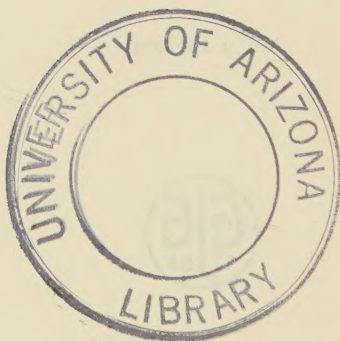


Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1911

Alle Rechte von der Verlagshandlung vorbehalten.



Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

516.7
K 812

Vorrede.

Das vorliegende Buch sollte ursprünglich den zweiten Abschnitt von Band II unserer „Raumkurven und Flächen“ (S. S. XXIX und XLIV) bilden. Da jedoch dieser zweite Band in der zweiten Auflage infolge gründlicher Umarbeitung und mehrfacher Erweiterung zu stark angeschwollen wäre, wurde auf Wunsch der Verlags- handlung der zweite Abschnitt davon abgetrennt und erscheint nun als selbständiges Werk, das übrigens nach wie vor in engster Beziehung zu den „Raumkurven und Flächen“ steht und deren ergänzenden Abschluß bildet. Die Veränderungen gegenüber der ersten Auflage bestehen, abgesehen von Verbesserungen im einzelnen, hauptsächlich in der Aufnahme einiger neuer Kapitel, wobei auch neuere Untersuchungen berücksichtigt wurden. Die wichtigsten dieser Erweiterungen sind folgende: Den Zentraflächen der allgemeinen W-Flächen wurde ein besonderer Paragraph gewidmet; bei den Minimalflächen wurde der geschichtliche Überblick etwas ausführlicher gehalten, die Herleitung der Differentialgleichung gegeben und die Bestimmung einer Minimalfläche durch einen Streifen mit Hilfe der Schwarzschen Formeln neu aufgenommen. In dem Abschnitt, der die Flächen von konstantem Krümmungsmaß behandelt, wurde neu aufgenommen ein Paragraph über die Kurven konstanter geodätischer Krümmung der pseudosphärischen Flächen und ein Paragraph, der die übersichtliche konforme Abbildung dieser Flächen auf die Ebene enthält. Ebenso wurde der Nicht-Euklidischen Geometrie an Stelle des kurzen Hinweises in der ersten Auflage eine eingehendere

Behandlung zuteil. Die stärkste Umarbeitung und Erweiterung hat der Abschnitt über Strahlensysteme erfahren: dies schien uns schon aus dem Grunde notwendig, um den Leser in das Verständnis der neuesten Literatur, die ja mit Vorliebe die Strahlensysteme und damit zusammenhängende Probleme behandelt, einzuführen. Neu aufgenommen wurden hier die schönen Untersuchungen von Ribaucour über isotrope Strahlensysteme und ihre Beziehungen zu den Minimalflächen, ferner die interessanten Strahlensysteme von Weingarten, Waelsch und Guichard; diese führten weiter zu den Guichardschen und Voßschen Flächen. Der kundige Leser wird in dem Abschnitt über Strahlensysteme auch einiges Neue finden, so z. B. die einfachen Formeln für die isotropen Strahlensysteme und die hieraus sich ergebende Konstruktion dieser in § 27; auch die beiden Sätze S. 142 f. dürften neu sein. Schließlich wurden noch die Übungsaufgaben vermehrt und auch hierbei neuere Untersuchungen verwertet. Bei den Originalabhandlungen wurden die Literaturnachweise beigelegt.

Nürtingen, Januar 1911.
Stuttgart

Die Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

| | Seite |
|--|-------|
| 1. W-Flächen. | |
| § 1. Definition der W-Flächen. Das sphärische Bild der W-Flächen | 1 |
| § 2. Die Zentrafläche einer W-Fläche | 7 |
| 2. Minimalflächen. | |
| § 3. Geschichtlicher Überblick. Differentialgleichung der Minimalflächen | 11 |
| § 4. Die Formeln von Monge und Weierstraß | 16 |
| § 5. Spezielle Minimalflächen | 22 |
| § 6. Assoziierte und adjungierte Minimalflächen | 27 |
| § 7. Die Formeln von Schwarz. Bestimmung einer Minimalfläche durch einen gegebenen Streifen | 31 |
| 3. Die Flächen von konstantem Krümmungsmaß. | |
| § 8. Allgemeines über Flächen von konstantem Krümmungsmaß | 35 |
| § 9. Die Pseudosphäre | 38 |
| § 10. Die Kurven konstanter geodätischer Krümmung auf den pseudosphärischen Flächen | 43 |
| § 11. Die Trigonometrie auf den Flächen von konstantem Krümmungsmaß | 49 |
| § 12. Sätze über Parallelen | 54 |
| § 13. Die Nicht-Euklidische Geometrie | 56 |
| § 14. Konforme Abbildung der pseudosphärischen Flächen auf die Halbebene | 62 |
| 4. Regelflächen. | |
| § 15. Das Linienelement der Regelflächen. Allgemeine Eigenschaften | 68 |
| § 16. Deformation der Regelflächen | 72 |
| 5. Dreifach orthogonale Flächensysteme. | |
| § 17. Definition der dreifach orthogonalen Flächensysteme | 75 |
| § 18. Die Fundamentalgrößen eines dreifach orthogonalen Flächensystems. Gleichungen von Lamé | 77 |
| § 19. Die Abbildung durch reziproke Radien-Vektoren (Inversion). Konforme Abbildung des Raumes auf sich selbst | 82 |
| § 20. Die Cykliden | 87 |

6. Strahlensysteme.

| | |
|--|-----|
| § 21. Definition. Formeln für Strahlensysteme | 90 |
| § 22. Anwendung auf Normalensysteme. Malus-Dupin- scher Satz | 96 |
| § 23. Grenzpunkte und Hauptebenen. Isotrope Strahlen- systeme | 102 |
| § 24. Abwickelbare Flächen, Brennpunkte der Strahlensysteme | 106 |
| § 25. Brennflächen | 109 |
| § 26. Die isotropen Strahlensysteme | 113 |
| § 27. Untersuchung der Mittelfläche eines isotropen Strahlen- systems | 123 |
| § 28. Formeln für die beiden Brennflächen eines allgemeinen Strahlensystems | 127 |
| § 29. Die Strahlensysteme von Weingarten und Waelsch | 134 |
| § 30. Guichardsche Strahlensysteme. Guichardsche und Voßsche Flächen | 135 |
| § 31. Die pseudosphärischen Strahlensysteme | 143 |
| § 32. Bäcklund'sche Transformation für die pseudosphäri- schen Flächen | 145 |
| § 33. Übungsaufgaben | 152 |

1. *W*-Flächen.

§ 1. Definition der *W*-Flächen. Das sphärische Bild der *W*-Flächen.

Als erste wichtige Klasse von speziellen Flächen betrachten wir diejenigen, für welche zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 eines Flächenpunkts (u, v) eine Relation von der Form

$$(1) \quad F(R_1, R_2) = 0$$

besteht. Diese Flächen heißen Weingartensche Flächen (kurz *W*-Flächen) nach Weingarten,¹⁾ der sich zuerst ausführlich mit ihnen beschäftigt hat. Spezielle

W-Flächen sind z. B. die Minimalflächen $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0\right)$ oder die Flächen von konstantem Krümmungsmaß $\left(\frac{1}{R_1 R_2} = \text{konst.}\right)$.

Aus der Gleichung (1) erhält man durch partielle Differentiation nach u, v

$$\frac{\partial F}{\partial R_1} \frac{\partial R_1}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial R_2} \frac{\partial R_2}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial R_1} \frac{\partial R_1}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial R_2} \frac{\partial R_2}{\partial v} = 0,$$

und hieraus, da $\frac{\partial F}{\partial R_1}$ und $\frac{\partial F}{\partial R_2}$ nicht beide gleich Null sind,

¹⁾ „Über eine Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen“ Journ. f. d. r. u. a. Math. 59. Bd. (1861), und „Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Funktion des anderen ist“, ebendort 62. Bd. (1862).

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial u} & \frac{\partial R_2}{\partial u} \\ \frac{\partial R_1}{\partial v} & \frac{\partial R_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Umgekehrt hat das identische Verschwinden der Determinante (2) eine Gleichung von der Form (1) zur Folge, da ja das Verschwinden der Funktionaldeterminante, gebildet aus den Funktionen R_1 und R_2 von u, v , die Bedingung dafür ist, daß zwischen R_1 und R_2 eine Relation besteht [vgl. Rk. u. Fl.¹⁾ I. Einleitung 12].

Zur Untersuchung der W -Flächen wählen wir als Parameterkurven die Krümmungslinien. Wir setzen daher nach II. § 3, Satz 3

$$(3) \quad F=0, \quad D'=0$$

und erhalten so für das Linienelement der Fläche

$$(4) \quad ds^2 = Edu^2 + Gdv^2.$$

Die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 haben nach II. § 3, (20) die Werte

$$(5) \quad R_1 = \frac{E}{D}, \quad R_2 = \frac{G}{D''}.$$

Die Gleichungen von Rodrigues [II. § 3, (21)] lauten

$$(6) \quad \frac{\partial a}{\partial u} = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial a}{\partial v} = -\frac{1}{R_2} \frac{\partial x}{\partial v}$$

sowie die analogen für b und c , und endlich die Gleichungen von Mainardi und Gauß II. § 18, (15) und (16)

$$(7) \quad \frac{\partial D}{\partial v} = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{E} + \frac{D''}{G} \right) \frac{\partial E}{\partial v}, \quad \frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{E} + \frac{D''}{G} \right) \frac{\partial G}{\partial u},$$

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) = -\frac{DD''}{\sqrt{EG}} = -\frac{\sqrt{E\bar{G}}}{R_1 R_2}.$$

¹⁾ Wir werden wiederholt auf unsere „Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen“ I. und II. [Sammlung Schubert Nr. XXIX und XLIV] Bezug nehmen müssen; wir werden dieses Werk kurz mit „Rk. u. Fl.“ zitieren; ist in einem Paragraphen ein wiederholter Verweis notwendig, so begnügen wir uns mit der Angabe der Bandzahl.

Aus (7) und (5) folgt

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E}{R_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial E}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G}{R_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial G}{\partial u}$$

oder

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\sqrt{E}}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2 - R_1} \frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \lg \left(\frac{\sqrt{G}}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1 - R_2} \frac{\partial R_2}{\partial u}.$$

Für eine W -Fläche kann man nun auf der rechten Seite der ersten Gleichung (9) R_2 mittelst (1) als Funktion von R_1 ausdrücken und ebenso in der zweiten Gleichung R_1 als Funktion von R_2 ; man sieht jetzt, daß von den Funktionen

$$\lg \left(\frac{\sqrt{E}}{R_1} \right) - \int \frac{dR_1}{R_2 - R_1}, \quad \lg \left(\frac{\sqrt{G}}{R_2} \right) - \int \frac{dR_2}{R_1 - R_2}$$

die erste eine Funktion von u allein, die zweite eine Funktion von v allein ist. Man erhält so

$$(10) \quad E = R_1^2 f(u) e^{2 \int \frac{dR_1}{R_2 - R_1}}, \quad G = R_2^2 \varphi(v) e^{2 \int \frac{dR_2}{R_1 - R_2}},$$

wo $f(u)$ eine Funktion von u , $\varphi(v)$ eine Funktion von v ist. Schließen wir den trivialen Fall $R_1 - R_2 = 0$ aus, wo die W -Fläche nach II. § 3 eine Kugel wäre, so haben die Integrale einen endlichen Wert. Führt man nun statt

$$\int \sqrt{f(u)} du, \quad \int \sqrt{\varphi(v)} dv$$

neue Parameter ein, die wir wieder mit u, v bezeichnen, so bleiben die Krümmungslinien Parameterkurven und die Gleichungen (10) lauten nun für diese neuen Parameter

$$(11) \quad E = R_1^2 e^{2 \int \frac{dR_1}{R_2 - R_1}}, \quad G = R_2^2 e^{2 \int \frac{dR_2}{R_1 - R_2}}.$$

Für das Linienelement ds der W -Fläche hat man

$$(12) \quad ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Wir bilden weiter das Linienelement des sphärischen Bilds der W -Fläche. Es ist nach (3), (5), (11) und II. § 4, (6)

$$(13) \quad E_0 = \frac{E}{R_1^2} = e^{2 \int \frac{dR_1}{R_2 - R_1}}, \quad F_0 = 0, \quad G_0 = \frac{G}{R_2^2} = e^{2 \int \frac{dR_2}{R_1 - R_2}},$$

und daher

$$(14) \quad ds_0^2 = E_0 du^2 + G_0 dv^2.$$

Weiter erhält man aus der Gaußschen Gleichung (8), für die Bildkugel ($R_1 R_2 = 1$) gebildet, die Gleichung

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} \right) + \sqrt{E_0 G_0} = 0.$$

Wie oben schon ausgeführt worden ist, muß man sich vorstellen, daß in (11) und (13) je in der ersten Gleichung R_2 vermöge (1) als Funktion von R_1 ausgedrückt ist und analog in der zweiten R_1 als Funktion von R_2 .

Statt dessen kann man aber auch R_1 und R_2 als Funktionen eines Hilfsparameters w betrachten. Man kann z. B.

$$(16) \quad e^{\int \frac{dR_1}{R_1 - R_2}} = w$$

setzen und nunmehr aus dieser Gleichung und (1) R_1 und R_2 als Funktionen von w bestimmen. Für R_1 möge sich so ergeben

$$(17) \quad R_1 = \varphi(w).$$

Aus (16) folgt

$$\frac{1}{R_1 - R_2} \frac{dR_1}{dw} = \frac{1}{w},$$

oder

$$(18) \quad \frac{\varphi'(w)}{R_1 - R_2} = \frac{1}{w},$$

oder

$$(19) \quad R_1 = \varphi(w), \quad R_2 = \varphi(w) - w\varphi'(w).$$

Diese Werte müssen natürlich die Gleichung (1) identisch befriedigen. Man kann daher die Funktion $\varphi(w)$ dadurch bestimmen, daß man die Werte von R_1 und R_2 aus (19) entnimmt, in (1) einführt und die entstehende Differentialgleichung für φ integriert. Wir setzen endlich die aus (19) sich ergebenden Werte von R_1 und R_2 in die Gleichungen (11) — (14) ein und erhalten so die wichtigen Gleichungen

$$(20) \quad E = \left\{ \frac{\varphi(w)}{w} \right\}^2, \quad F = 0, \quad G = \left\{ \frac{\varphi(w) - w\varphi'(w)}{\varphi'(w)} \right\}^2,$$

$$(21) \quad ds^2 = \left\{ \frac{\varphi(w)}{w} \right\}^2 du^2 + \left\{ \frac{\varphi(w) - w\varphi'(w)}{\varphi'(w)} \right\}^2 dv^2;$$

$$(22) \quad E_0 = \frac{1}{w^2}, \quad F_0 = 0, \quad G_0 = \frac{1}{\varphi'(w)^2},$$

$$(23) \quad ds_0^2 = \frac{du^2}{w^2} + \frac{dv^2}{\varphi'(w)^2}.$$

In den Gleichungen (20)—(23) ist w noch als Funktion von (u, v) zu bestimmen. Dies kann dadurch geschehen, daß man aus (22) die Werte von E_0 und G_0 entnimmt und in (15) einsetzt. Durch Integration der entstehenden Differentialgleichung erhält man w als Funktion von u und v .

Aus den Gleichungen (19)—(23) folgen die Sätze:

Satz 1. Wird eine W -Fläche sphärisch abgebildet, so können die Parameter u, v der Krümmungslinien so gewählt werden, daß das Linienelement der Kugel die Form (23) annimmt, wo w eine Funktion von u, v ist. Die Hauptkrümmungsradien ergeben sich aus (19).

Satz 2. Wenn umgekehrt das Linienelement der Kugel vom Radius $= 1$ auf irgend eine Weise auf die Form (23) gebracht ist, so gibt es eine W -Fläche, die, auf die Kugel abgebildet, das System u, v zu Bildern der Krümmungslinien hat. Die Hauptkrümmungsradien erhält man aus (19), und aus (21) das Linienelement der W -Fläche selbst.

Der Satz 2 ist noch zu beweisen. Wir nehmen also an, daß φ in (23) als Funktion von w und w als Funktion von u, v gegeben ist. Wir bestimmen nun zunächst rein formal E, F, G aus (20), R_1 und R_2 aus (19), D, D', D'' aus (3) und (5). Da $F = D' = 0$, so sind die Mainardischen Gleichungen von der Form (7). Diese hatten aber mit Hilfe von (5) die Gleichungen (9) zur Folge. Eine leichte Rechnung zeigt, daß die Gleichungen (9) und somit die Mainardischen Gleichungen erfüllt sind. Aus den Gleichungen (20) und (22) folgt

$$\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

und hieraus, daß die Gleichung (8) eine Folge der Gleichung (15) ist. Da nun vorausgesetzt ist, daß E_0 , G_0 die Gleichung (15) erfüllen, so sieht man, daß die Fundamentalgrößen E , G , D , D'' die Gauß'sche Gleichung (8) erfüllen. Diese Fundamentalgrößen befriedigen also die Gauß-Mainardischen Gleichungen, und darum existiert nach dem Satz von Bonnet (II. § 17) die zugehörige Fläche; wegen $F = D' = 0$ sind die Parameterkurven u , v die Krümmungslinien. Auch folgt jetzt, daß die oben zunächst formal bestimmten Funktionen R_1 und R_2 die Werte für die Hauptkrümmungsradien im Punkte (u, v) der Fläche angeben. Die Fläche ist endlich eine W -Fläche, da durch Elimination von w aus (19) eine Relation von der Form (1) entsteht.

Bemerkung. Kennt man für die W -Fläche das Linienelement (23) des sphärischen Bildes, so kann man nun die Fläche selbst auf folgende Weise erhalten: Da man für die Bildkugel alle sechs Fundamentalgrößen kennt [s. II. § 4, (13)], so erhält man durch Integration der Gleichungen II. § 4, (18) die Kugelkoordinaten a , b , c (dort mit X , Y , Z bezeichnet) als Funktionen von u , v (vgl. II. § 17, Satz von Bonnet). Kennt man nun a , b , c als Funktionen von u , v , so geben die Formeln (6) die die W -Fläche mittels Quadraturen in der Form

$$\begin{aligned}
 x &= - \int \left(R_1 \frac{\partial a}{\partial u} du + R_2 \frac{\partial a}{\partial v} dv \right), \\
 y &= - \int \left(R_1 \frac{\partial b}{\partial u} du + R_2 \frac{\partial b}{\partial v} dv \right), \\
 z &= - \int \left(R_1 \frac{\partial c}{\partial u} du + R_2 \frac{\partial c}{\partial v} dv \right).
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Anwendung auf die Minimalflächen ($R_1 + R_2 = 0$).
Aus (19) folgt zur Bestimmung der Funktion φ

$$R_1 + R_2 = 2\varphi - w \frac{d\varphi}{dw} = 0$$

und durch Integration

$$\varphi = \frac{w^2}{2},$$

abgesehen von einer willkürlichen Konstanten. Aus (19), (21) und (23) ergeben sich die Gleichungen

$$(25) \quad \begin{aligned} R_1 &= \frac{w^2}{2}, \quad R_2 = -\frac{w^2}{2}, \\ ds_0^2 &= \frac{1}{w^2} (du^2 + dv^2), \\ ds^2 &= \frac{w^2}{4} (du^2 + dv^2). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (25) enthalten die Sätze

Satz 3. Die Krümmungslinien einer Minimalfläche, sowie ihre sphärischen Bilder bilden ein isometrisches System.

Satz 4. Die sphärische Abbildung einer Minimalfläche ist dem Urbild konform (vgl. II. S. 31).

Da man nun auf der Kugel die allgemeinsten Isothermensysteme kennt [II. § 8, (27)], d. h. a, b, c als Funktionen von u, v , so daß die Kurven $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ ein Isothermensystem bilden, so erhält man alle Minimalflächen durch Quadraturen aus (24).

Es wäre nun nicht schwer, auf diesem Wege wirklich die endlichen Gleichungen aller Minimalflächen zu bestimmen (vgl. § 33, Aufg. 4). Wir ziehen es (s. § 4) vor, einen einfacheren und der geschichtlichen Entwicklung entsprechenderen Weg zu gehen.

§ 2. Die Zentrafläche einer W -Fläche.

Da die W -Flächen durch eine Beziehung zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 eines Punktes (u, v) charakterisiert sind, so liegt es nahe, den Ort der Hauptkrümmungszentren, d. h. die beiden Mäntel der Zentrafläche einer W -Fläche zu untersuchen und zu fragen, ob die Relation zwischen den Hauptkrümmungsradien nicht gewisse Beziehungen zwischen den beiden Mänteln der Zentrafläche zur Folge hat. Dies ist in der Tat der Fall.

Wie in Rk. u. Fl. II., § 5 möge der erste Zentramantel C_1 der W -Fläche durch die Schnittpunkte konsekutiver Flächennormalen längs der Krümmungslinien $v = \text{konst.}$ erzeugt werden. Es lautet dann die Diffe-

rentialgleichung der Asymptotenlinien auf C_1 nach II. § 5, (8) und II. § 3, (6)

$$(1) \quad ER_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial u} du^2 - GR_1^2 \frac{\partial R_2}{\partial u} dv^2 = 0.$$

Vertauscht man hier u mit v und R_1 mit R_2 , so erhält man als Differentialgleichung der Asymptotenlinien auf C_2

$$(2) \quad ER_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial v} du^2 - GR_1^2 \frac{\partial R_2}{\partial v} dv^2 = 0.$$

Die Gleichungen (1) und (2) sind aber nach § 1, (2) identisch und man hat daher den

Satz 1. (Ribaucour¹⁾) Den Asymptotenlinien des ersten Zentramantels einer W -Fläche entsprechen die Asymptotenlinien des zweiten Mantels.

Umgekehrt: Entsprechen sich die Asymptotenlinien auf den beiden Zentramänteln einer Fläche, so ist die Fläche eine W -Fläche.

Dabei sollen „entsprechende“ Punkte der beiden Zentramäntel denselben Parameterwerten (u, v) zugehören: oder auf jeder Normalen der Ausgangsfläche sind der erste und zweite Hauptkrümmungsmittelpunkt entsprechende Punkte. Die Umkehrung des Satzes ergibt sich sofort, wenn man bedenkt, daß die Identität von (1) und (2) die Gleichung (2) von § 1 nach sich zieht, was aber eine Relation zwischen R_1 und R_2 bedeutet.

Der Ribaucoursche Satz hat zur Folge, daß jedem konjugierten System auf C_1 ein konjugiertes System auf C_2 entspricht; man zeigt dies leicht mit Hilfe der Gleichung (4) von II. § 3. So gefaßt hat der Ribaucoursche Satz auch dann einen Sinn, wenn die Asymptotenlinien auf beiden Mänteln imaginär sind.

Wir betrachten nun die Krümmungsmaße k_1 und k_2 in entsprechenden Punkten von C_1 und C_2 .

¹⁾ Ribaucour, Comptes rendus. t. 74. p. 1402 (1872).

Es ist nach II. § 5, (9)

$$k_1 = - \frac{1}{(R_2 - R_1)^2} \frac{\frac{\partial R_2}{\partial u}}{\frac{\partial R_1}{\partial u}},$$

und analog

$$k_2 = - \frac{1}{(R_1 - R_2)^2} \frac{\frac{\partial R_1}{\partial v}}{\frac{\partial R_2}{\partial v}}.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen, so folgt nach § 1, (2)

$$(3) \quad k_1 k_2 = \frac{1}{(R_1 - R_2)^4}.$$

Da nun $R_1 - R_2$ gleich dem Abstand der beiden Hauptkrümmungszentren ist, so hat man den

Satz 2. (Halphen¹⁾. Für jede W -Fläche ist das Produkt der Krümmungsmaße in entsprechenden Punkten der beiden Zentraflächenmäntel gleich dem reziproken Wert der vierten Potenz des Abstands der beiden Punkte.

Bemerkung. Die Sätze 1. und 2. sind spezielle Fälle allgemeinerer Sätze, die in § 29 sich ergeben werden.

Das Quadrat des Linienelements ds_1 für den Mantel C_1 ist nach II. § 5, (6)

$$(4) \quad ds_1^2 = dR_1^2 + \frac{G}{R_2^2} (R_2 - R_1)^2 dv^2.$$

Es ist nun

$$(R_2 - R_1)^2 = e^{2 \lg(R_2 - R_1)} = e^{2 \int \frac{dR_2 - dR_1}{R_2 - R_1}};$$

benutzt man dies und die Gleichung (13) des § 1, so folgt die wichtige Gleichung

$$(5) \quad ds_1^2 = dR_1^2 + e^{2 \int \frac{dR_1}{R_1 - R_2}} dv^2.$$

Da hier R_2 aus § 1, (1) als Funktion von R_1 einzutragen ist, so ist der Koeffizient von dv^2 eine reine Funktion von R_1 und zwar für alle W -Flächen mit der-

¹⁾ Halphen, Bull. d. l. soc. math. de Paris. IV. p. 94 (1876).

selben Bestimmungsgleichung [§ 1, (1)] dieselbe Funktion. Alle ersten Zentramäntel derjenigen W -Flächen, die derselben Bestimmungsgleichung entsprechen, sind daher aufeinander abwickelbar und ebenso natürlich die zweiten Mäntel. Nach II. § 7, (14) ist aber das Linienelement (5) auch das einer Rotationsfläche. Die ersten Zentramäntel aller W -Flächen mit derselben Bestimmungsgleichung sind daher auf eine und dieselbe Rotationsfläche abwickelbar. Dabei entsprechen die geodätischen Linien (vgl. II. S. 39) $v = \text{konst.}$ von C_1 den Meridianen, die Kurven $R_1 = \text{konst.}$ den Parallelkreisen der Rotationsfläche. Man hat also den

Satz 3. (Weingarten.¹⁾) Alle W -Flächen, für welche die nämliche Relation $F(R_1, R_2) = 0$ gilt, haben die Eigenschaft, daß die zugehörigen Zentramäntel C_1 sich auf ein und dieselbe Rotationsfläche abwickeln lassen; dabei gehen die geodätischen Linien $v = \text{konst.}$ von C_1 in die Meridiane und die Kurven $R_1 = \text{konst.}$ von C_1 in die Parallelkreise der Rotationsfläche über. Derselbe Satz gilt für C_2 .

Um nun für eine gegebene W -Fläche, d. h. wenn $F(R_1, R_2) = 0$ gegeben ist, die Rotationsfläche zu ermitteln, auf welche C_1 abwickelbar ist, vergleichen wir das Linienelement (5) von C_1 mit dem Linienelement einer Rotationsfläche, das nach II. § 7, (4) die Form

$$(6) \quad ds^2 = \{1 + f'(u)^2\} du^2 + u^2 dv^2$$

hat. Wir setzen daher

$$(7) \quad dR_1 = \sqrt{1 + f'(\bar{u})^2} du, \quad u = e^{\int \frac{dR_1}{R_1 - R_2}}.$$

Da man sich vorstellen muß, daß mittelst der Gleichung $F(R_1, R_2) = 0$ in dem Integral R_2 als Funktion von R_1 ausgedrückt wird, so kann man aus den beiden Gleichungen R_1 eliminieren und erhält so zur Bestimmung von $f(u)$ eine Differentialgleichung. Ist $f(u)$ bestimmt, so geben die Gleichungen II. § 7, (1) die zugehörige Rotationsfläche.

Anmerkung. Weingarten hat (a. a. O.) bewiesen, daß man den Satz 3. umkehren kann, er lautet dann: „Jede Fläche, die auf eine

¹⁾ Weingarten, Journal f. Math. Bd. 59. p. 384 (1861).

Rotationsfläche abwickelbar ist, kann betrachtet werden als der eine Mantel der Zentralfäche einer Fläche, zwischen deren Hauptkrümmungsradien eine Gleichung $F(R_1, R_2) = 0$ besteht. Eine Ausnahme bilden nur die auf das Katenoid abwickelbaren Regelflächen.“ Da wir von diesem Satze keinen Gebrauch machen, so übergehen wir dessen Beweis.

Beispiel. Wir nehmen die Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß, für die also $R_1 R_2 = -a^2$ ist, und suchen die Rotationsfläche, auf die der erste Zentrarmantel der Fläche abgewickelt werden kann. Setzt man

in der zweiten Gleichung (7) für R_2 den Wert $-\frac{a^2}{R_1}$, so folgt $R_1 = \sqrt{u^2 - a^2}$ und jetzt aus der ersten Gleichung (7)

$$1 + f'(u)^2 = \frac{u^2}{u^2 - a^2}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch Integration $f(u)$; beachtet man, daß $z = f(u)$ ist und löst man die eben erhaltene Gleichung nach u auf, so erhält man als Meridiankurve der Rotationsfläche die Kettenlinie mit der Gleichung

$$u = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}} \right).$$

Man vergleiche hierzu auch II. § 14, (22) und die hieran sich anschließende Rechnung. Da die Relation $R_1 R_2 = -a^2$ symmetrisch in R_1 und R_2 ist, so sieht man, daß die beiden Zentrarmäntel jeder Fläche von konstantem negativem Krümmungsmaß auf das Katenoid abwickelbar sind [vgl. auch § 9].

2. Minimalflächen.

§ 3. Geschichtlicher Überblick. Differentialgleichung der Minimalflächen.

Die Minimalflächen wurden zuerst von Lagrange¹⁾ in die Mathematik eingeführt. Er behandelte die Aufgabe, durch eine geschlossene Kurve C im Raume eine Fläche so zu legen, daß der von C eingeschlossene Flächenraum S

¹⁾ Lagrange, „Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies“, *Miscellanea Taurinensia* 2 (1760/61) = *Œuvres* 1, p. 335.

ein Minimum wird. Die gesuchte Fläche heißt daher eine Minimalfläche. Ist die Flächengleichung in der Form $z = f(x, y)$ gegeben, so ist der Flächeninhalt S bestimmt durch

$$S = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy,$$

wo das Integral über die Fläche innerhalb von C zu führen ist. Als notwendige Bedingung dafür, daß S ein Minimum wird, erhielt Lagrange

$$(1) \quad (1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t = 0,$$

wobei $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ usw. ist.

Für diese Differentialgleichung hat Meusnier¹⁾ (1776) eine sehr einfache geometrische Deutung gegeben. Die Gleichung (1) sagt nämlich nach Rk. u. Fl. I. § 22, (13) aus, daß für jeden Punkt einer Minimalfläche die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 durch die Relation

$$(2) \quad R_1 + R_2 = 0$$

verbunden sind, daß also in jedem Flächenpunkt die mittlere Krümmung $h = 0$ ist. Die Minimalflächen gehören daher zu den W -Flächen. Meusnier hat auch die ersten speziellen Minimalflächen gefunden, nämlich das Katenoid und die Schraubenregelfläche (Wendelfläche).

Das allgemeine Integral für die Differentialgleichung (1) gab zuerst Monge²⁾ (1784), allerdings in imaginärer Form, die es nicht gestattete, andere als die von Meusnier angegebenen Minimalflächen zu finden. Einen wichtigen Fortschritt bedeuten die Arbeiten von Enneper³⁾ (1864) und Weierstraß⁴⁾ (1866). Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) erscheint nun in einer Form, die beliebig viele reelle Minimalflächen ohne

¹⁾ Meusnier, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, „Mém. des Savants étrangers, t. 10 (lu 1776) 1785 p. 504.

²⁾ Monge, „*Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles*“, Mém. de l'Acad. des Sciences 1784.

³⁾ Enneper, „*Analytisch-geometrische Untersuchungen*“, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 9. Jahrg. (1864).

⁴⁾ Weierstraß, „*Über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist*“, Monatsberichte d. Berl. Akad. 1866.

Schwierigkeit anzugeben erlaubt und die zur Beantwortung vieler, die Minimalflächen betreffenden Fragen geeignet erscheint. Nunmehr war der Weg zu einer großen Reihe bedeutender und wichtiger Arbeiten geebnet. Wir müssen uns bei dem notwendig nur knapp bemessenen Bericht begnügen, einige der namhaftesten Mathematiker, wie Riemann, Schwarz, Lie, Ribaucour u. a. zu nennen, die die Theorie der Minimalflächen besonders gefördert haben. Die betreffenden Arbeiten mögen bei Gelegenheit genannt werden. Eines der interessantesten aber auch schwierigsten Probleme ist die sog. Plateausche Aufgabe, eine Minimalfläche bei gegebener Begrenzung zu bestimmen. Nur in wenigen Fällen kennt man die Lösung. Dieses Problem, auf das sich mehrere wichtige Arbeiten von Schwarz ¹⁾ beziehen, ist auch deshalb von Interesse, weil es physikalisch höchst einfach gelingt, die gefundenen Resultate zu verifizieren. Stellt man nämlich die gegebene Randkurve aus Draht her und taucht diese in eine zähe Seifenlösung, so nimmt die Flüssigkeitslamelle die Gestalt einer Minimalfläche an. ²⁾

Wir gehen nun dazu über, die Differentialgleichung für die Minimalflächen abzuleiten. Es möge also eine geschlossene Randkurve C gegeben und verlangt sein, durch diese Kurve eine im Innern von C singularitätenfreie Fläche von kleinstem Flächeninhalt zu legen. Seien

$$(3) \quad x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad z=z(u,v)$$

die Gleichungen der gesuchten Fläche S , so ist nach II. § 1, (22) der Inhalt J dieser Fläche bestimmt durch

$$(4) \quad J = \iint \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \iint \Delta u \, du \, dv,$$

wo das Integral über alle Werte von u, v , zu erstrecken ist, die den Flächenpunkten innerhalb von C , die wir kurz „innere Punkte“ nennen, entsprechen. Für eine andere durch C gelegte Fläche muß dann das entsprechende

¹⁾ Schwarz, Gesammelte math. Abhandl. I. Berlin 1890.

²⁾ Einen ausführlichen Bericht über die Geschichte der Minimalflächen findet der Leser in den gesammelten Werken von Schwarz Bd. I, Berlin 1890. Außerdem möge noch auf die *Leçons* von Darboux Bd. I, p. 267 ff., sowie auf den Artikel III. D. 5, p. 307 ff. der *Encyclopédie der math. Wissensch.* hingewiesen werden.

Integral notwendig einen größeren Wert besitzen. Wir verschieben nun jeden inneren Punkt von S auf seiner Normalen um ein sehr kleines, von Punkt zu Punkt veränderliches Stück und berechnen den Inhalt der neuen Fläche S_1 . Ist $f(u, v)$ eine für alle inneren Punkte von S stetige Funktion, die auf der Randkurve C überall den Wert Null hat und ε eine sehr kleine konstante Größe, so lauten die Gleichungen der durch C gehenden und zu S benachbarten Fläche S_1

$$(5) \quad \begin{aligned} x_1 &= x + \varepsilon a \cdot f(u, v) & y_1 &= y + \varepsilon b \cdot f(u, v), \\ z_1 &= z + \varepsilon c \cdot f(u, v). \end{aligned}$$

Es ist nun

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + \varepsilon f \frac{\partial a}{\partial u} + \varepsilon a \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} + \varepsilon f \frac{\partial a}{\partial v} + \varepsilon a \frac{\partial f}{\partial v}$$

usw. Wir berechnen jetzt die Fundamentalgrößen E_1 , F_1 , G_1 der Fläche S_1 , indem wir alle diejenigen Glieder vernachlässigen, die bezüglich ε von höherer als der ersten Ordnung unendlich klein sind. Es folgt so

$$E_1 = E + 2\varepsilon \left\{ f \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} \sum a \frac{\partial x}{\partial u} \right\} + \dots$$

oder, da $\sum a \frac{\partial x}{\partial u} = 0$ und $\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial a}{\partial u} = -D$ [vgl. II. § 2, (13)] ist,

$$(6) \quad \begin{aligned} E_1 &= E - 2fD\varepsilon + \dots, & F_1 &= F - 2fD'\varepsilon + \dots, \\ G_1 &= G - 2fD''\varepsilon + \dots, \end{aligned}$$

wobei F_1 , G_1 auf analoge Weise erhalten werden. Man erhält jetzt wieder unter Vernachlässigung höherer Potenzen von ε

$$E_1 G_1 - F_1^2 = \Delta_1^2 = \Delta^2 - 2f\{ED'' - 2FD' + GD\}\varepsilon + \dots$$

oder nach II. § 3, (16)

$$\Delta_1 = \Delta \sqrt{1 - 2fh\varepsilon + \dots}$$

Entwickelt man die Wurzel nach Potenzen von ε , so ergibt sich

$$(7) \quad \Delta_1 = \Delta - f\Delta h\varepsilon + \dots$$

Ist nun J_1 der Inhalt der Fläche S_1 im Innern der Randkurve C , so folgt aus (4) und (7)

$$(8) \quad J_1 = J - \varepsilon \iint \Delta \cdot h f(u, v) du dv + \dots,$$

wo also alle höheren Potenzen von ε vernachlässigt sind. Man sieht nun sofort ein, daß das Integral, das über die inneren Punkte von S zu erstrecken ist, verschwinden muß. Denn würde es nicht verschwinden, sondern etwa einen positiven Wert besitzen, so nehmen wir ε als positive Größe (hätte das Integral einen negativen Wert, so nehme man für ε eine negative Größe) und man sieht, daß dann J_1 einen kleineren Wert besitzen würde als J , und J wäre gegen die Voraussetzung nicht der kleinste Flächenraum. Freilich treten in (8) auch noch Glieder mit ε^2 , ε^3 usw. auf, es ist aber bekannt, daß die Summe der absoluten Beträge all dieser Glieder kleiner ist als das Glied von ε , falls ε nur hinreichend klein genommen wird. Es ist also notwendig

$$(9) \quad \iint \Delta h f(u, v) du dv = 0$$

und zwar wie auch die Funktion $f(u, v)$ gewählt werden mag. Hieraus kann man schließen, daß h identisch Null sein muß; denn wäre h nicht überall Null, so kann man stets $f(u, v)$ so bestimmen, daß das Integral von Null verschieden, z. B. positiv wird; man wähle nur die Funktion $f(u, v)$ so, daß sie an allen den Stellen (u, v) wo h positiv, selbst positiv, an den anderen Stellen negativ ist,¹⁾ dann wird das Integral positiv; denn da Δ eine überall positive Größe ist, so muß das Integral als Summe lauter positiver Größen auch positiv sein. Soll also das Integral für jedes beliebige $f(u, v)$ verschwinden, so muß $h = 0$ sein. Man findet daher, daß, wenn S den kleinsten Flächeninhalt besitzen soll, notwendig identisch für alle Punkte (u, v) ,

$$(10) \quad h = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

sein muß. Wir bemerken sogleich, daß diese Bedingung wohl notwendig, aber keineswegs ohne weiteres hin-

¹⁾ Ist z. B. $\varphi(u, v)$, eine beliebige im Innern von C stetige und auf C selbst verschwindende Funktion, so erhält, sofern nicht $h = 0$ ist, für $f(u, v) = h [\varphi(u, v)]^2$ das Integral einen positiven Wert.

reichend ist; denn zur Untersuchung, ob ein wirkliches Minimum vorliegt, müßten in (6) auch noch die höheren Potenzen von ε beigezogen werden. Auf diese ziemlich schwierige Frage der sog. zweiten Variation¹⁾ können wir uns hier nicht einlassen. Wir nennen vielmehr jede Fläche, für die in allen ihren Punkten die mittlere Krümmung gleich Null ist, eine Minimalfläche, gleichviel ob im einzelnen Falle ein Minimum gerade vorliegt oder nicht.

§ 4. Die Formeln von Monge und Weierstraß.

Es handelt sich nun darum, das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$(1) \quad h = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

zu finden. Monge hat erkannt, daß die Bedingungsgleichung (1) besonders einfach wird, wenn man als Parameterkurven die Minimallinien²⁾ (Rk. u. Fl. II. § 8) der Fläche wählt. Man hat also $E = G = 0$ und für das Linienelement der Fläche

$$(2) \quad ds^2 = 2F du dv.$$

Wegen (1) folgt aus II. § 3, (16) $D' = 0$ und man erhält nun aus der mittleren Gleichung II. § 2, (23) als Differentialgleichungen der Minimalflächen

$$(3) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

Diese lassen sich aber sofort integrieren in der Form

$$(4) \quad x = U_1 + V_1, \quad y = U_2 + V_2, \quad z = U_3 + V_3,$$

wo U_1, U_2, U_3 Funktionen nur von u , V_1, V_2, V_3 Funk-

¹⁾ Wir verweisen den Leser auf die wichtige Arbeit von Schwarz über die zweite Variation des Flächeninhalts eines Minimalflächenstücks, ges. Werke I. Bd. S.151 ff.

²⁾ Wir bemerken, daß der Begriff „Minimallinie“ Monge fremd war. Erst Lie hat diese wichtigen Kurven in die Mathematik eingeführt (vgl. die Anm. zu I., § 13); von Lie rühren auch die beiden geometrischen Erzeugungsweisen der Minimalflächen aus Minimalkurven her, vgl. Satz 1. 2.

tionen nur von v bedeuten. Wegen $E = G = 0$ müssen diese willkürlichen Funktionen den Gleichungen

$$(5) \quad U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 0, \quad V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = 0$$

genügen, wo zur Abkürzung $U_1' = \frac{dU_1}{du}$ usw. gesetzt ist.

Die Formeln (4) und (5) sind die von Monge gegebenen und bestimmen die allgemeinste Minimalfläche.

Den Gleichungen (4) kann man nach Lie zwei interessante geometrische Deutungen geben. Um diese zu erhalten, mögen für den Augenblick die sechs Funktionen beliebige reelle Funktionen der reellen Parameter u, v sein. Es seien $u = u_0, v = v_0$ zwei beliebige Parameterkurven, die sich in einem Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ schneiden, so daß also

$$x_0 = U_1(u_0) + V_1(v_0)$$

usw. ist. Ferner sei $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ein anderer Punkt der Parameterlinie $v = v_0$, so daß also

$$x_1 = U_1(u_1) + V_1(v_0)$$

usw. ist, so haben die beiden durch P_0 und P_1 gehenden Parameterlinien $u = \text{konst.}$ zu Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= U_1(u_0) + V_1(v), & y &= U_2(u_0) + V_2(v), & z &= U_3(u_0) + V_3(v); \\ x &= U_1(u_1) + V_1(v), & y &= U_2(u_1) + V_2(v), & z &= U_3(u_1) + V_3(v). \end{aligned}$$

Die zweite Kurve geht aber aus der ersten dadurch hervor, daß man die Koordinaten jedes Punkts der ersten Kurve bezüglich um

$$U_1(u_1) - U_1(u_0), \quad U_2(u_1) - U_2(u_0), \quad U_3(u_1) - U_3(u_0)$$

oder um

$$x_1 - x_0, \quad y_1 - y_0, \quad z_1 - z_0$$

vermehrt. Daraus folgt, daß die erste Kurve dadurch in die zweite übergeführt wird, daß jeder Punkt der ersteren in der Richtung P_0P_1 um die Strecke P_0P_1 verschoben wird. Die Fläche kann also durch Translation der Kurve $u = u_0$ längs der Kurve $v = v_0$ erzeugt werden: aus diesem Grunde nennt man jede Fläche, deren Gleichungen die Form (4) haben, eine Translations-

fläche oder Schiebungsfläche. Natürlich kann dieselbe Fläche auch durch Translation der Kurve $v = v_0$ längs der Kurve $u = u_0$ erzeugt werden. Wir bemerken, daß bei jeder Translationsfläche (4) die Parameterkurven (u, v) ein konjugiertes System bilden; denn die Gleichungen (4) haben die Gleichungen (3) und diese nach II. § 2, (13a) $D' = 0$ zur Folge, womit nach II. § 3 Satz 1, die Behauptung bewiesen ist.

Eine zweite geometrische Deutung der Gleichungen (4) ergibt sich, wenn wir die beiden durch die Gleichungen

$$(6) \quad \xi_1 = 2U_1, \quad \eta_1 = 2U_2, \quad \zeta_1 = 2U_3;$$

$$(7) \quad \xi_2 = 2V_1, \quad \eta_2 = 2V_2, \quad \zeta_2 = 2V_3,$$

definierten Raumkurven Γ_1 und Γ_2 betrachten. Aus (4), (6) und (7) folgt nämlich

$$(8) \quad x = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad y = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}, \quad z = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2},$$

und damit erscheint die Fläche (4) als der Ort der Mitten aller Strecken, welche die Punkte von Γ_1 mit den Punkten von Γ_2 verbinden.

Kehren wir nunmehr zu dem speziellen Fall der Minimalflächen zurück, so sind bei der ersten Deutung wegen (5) nach I. § 13, (16) die Parameterkurven Minimallinien und ebenso bei der zweiten die Kurven Γ_1 und Γ_2 . Man hat daher die wichtigen Sätze:

Satz 1. Die allgemeinste Minimalfläche wird erzeugt durch Translation einer Minimalkurve des einen Systems längs einer Minimalkurve des andern Systems. Die Minimallinien jeder Minimalfläche bilden ein konjugiertes System.

Satz 2. Eine Minimalfläche kann als Ort der Mitten aller Sehnen angesehen werden, welche die Punkte einer Minimalkurve Γ_1 mit den Punkten einer anderen Minimalkurve Γ_2 verbinden.

Aus dem letzten Satze erhält man nun aber sofort die Formeln von Weierstraß; denn zwei Minimalkurven Γ_1 und Γ_2 und zwar die allgemeinsten haben nach I. § 13, (18) zu Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \int (1 - u^2) F(u) du, & \xi_2 &= \int (1 - v^2) \Phi(v) dv, \\ (9) \quad \eta_1 &= i \int (1 + u^2) F(u) du, & \eta_2 &= -i \int (1 + v^2) \Phi(v) dv, \\ \zeta_1 &= 2 \int u F(u) du, & \zeta_2 &= 2 \int v \Phi(v) dv, \end{aligned}$$

wo $F(u)$ und $\Phi(v)$ willkürliche Funktionen von u bzw. v sind.

Aus (8) und (9) erhält man nun die Formeln von Weierstraß für die allgemeinste Minimalfläche

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \int (1 - u^2) F(u) du + \frac{1}{2} \int (1 - v^2) \Phi(v) dv, \\ (10) \quad y &= \frac{i}{2} \int (1 + u^2) F(u) du - \frac{i}{2} \int (1 + v^2) \Phi(v) dv, \\ z &= \int u F(u) du + \int v \Phi(v) dv. \end{aligned}$$

Aus der Form der Gleichungen (10) ergibt sich auch unmittelbar die Bedingung dafür, daß die Minimalfläche (10) reell sei. Da nämlich nach II. § 8 die Parameter u, v der Minimallinien der Fläche konjugiert imaginäre Größen sind, so müssen auch $F(u)$ und $\Phi(v)$ konjugiert imaginäre Größen sein; denn nur so hebt sich in (10) alles Imaginäre heraus. Die Funktion Φ muß daher für eine reelle Fläche aus F durch Vertauschung von i mit $-i$ hervorgehen, oder F und Φ müssen für eine reelle Fläche konjugierte Funktionen sein.

In diesem Falle schreibt man die Gleichungen von Weierstraß oft in der Form

$$\begin{aligned} x &= \Re \int (1 - u^2) F(u) du, \\ (11) \quad y &= \Re \int i (1 + u^2) F(u) du, \\ z &= \Re \int 2u F(u) du. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind so zu verstehen, daß nach der Integration für u eine komplexe Größe $u_1 + iv_1$ zu setzen und für x, y, z immer nur der reelle Teil (\Re) der resultierenden Funktion zu nehmen ist. Die Koordinaten x, y, z der reellen Minimalfläche sind dann

¹⁾ Es wurde hier statt $+i - i$ gesetzt, was gestattet ist, da auch so die zweite Gleichung (5) erfüllt ist. Es ergibt sich auf diese Weise die Bedingung für reelle Minimalflächen besonders einfach.

also als Funktionen der beiden reellen Parameter u_1, v_1 dargestellt. In der Formel (11) entspricht jeder Funktion $F(u)$ der komplexen Variablen u eine Minimalfläche.

Anmerkung 1. In den Formeln (11) können die Integralzeichen dadurch entfernt werden, daß man für die willkürliche Funktion $F(u)$ den dritten Differentialquotienten einer anderen willkürlichen Funktion setzt, also

$$E(u) = f'''(u),$$

Aus (11) folgt dann durch Integration nach Teilen

$$\begin{aligned} (12) \quad x &= \Re \{ (1 - u^2) f''(u) + 2u f'(u) - 2f(u) \}, \\ y &= \Re \{ i(1 + u^2) f''(u) - 2iu f'(u) + 2if(u) \}, \\ z &= \Re \{ 2u f''(u) - 2f'(u) \}. \end{aligned}$$

Nimmt man in (12) für $f(u)$ eine algebraische Funktion, so ist die Minimalfläche selbst algebraisch. Umgekehrt hat Weierstraß (a. a. O.) gezeigt, daß jeder algebraischen Minimalfläche eine algebraische Funktion $f(u)$ entspricht.

Aus den Gleichungen (10) ergeben sich die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung und damit die wichtigsten Flächenkurven auf den Minimalflächen.

Nach II. § 1, (10) erhält man aus (10) für die Fundamentalgrößen erster Ordnung

$$(13) \quad E = 0, \quad F = \frac{1}{2}(1 + uv)^2 F(u) \Phi(v), \quad G = 0$$

und somit für das Linienelement der Fläche

$$(14) \quad ds^2 = (1 + uv)^2 F(u) \Phi(v) du dv.$$

Bildet man weiter die Gleichungen II. § 2, (11) mit Hilfe von (10), so erhält man für die Richtungskosinus a, b, c der Flächennormalen oder die Koordinaten des sphärischen Bildes der Fläche

$$(15) \quad a = \frac{u + v}{1 + uv}, \quad b = \frac{i(v - u)}{1 + uv}, \quad c = \frac{uv - 1}{1 + uv}$$

und für das Linienelement ds_0 des sphärischen Bildes

$$(16) \quad ds_0^2 = da^2 + db^2 + dc^2 = \frac{4 du dv}{(1 + uv)^2}.$$

Weiter folgt nach II. § 2, (13) für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung

$$(17) \quad D = -F(u), \quad D' = 0, \quad D'' = -\Phi(v).$$

Nach II. § 3, (7) erhält man so als Differentialgleichung der Asymptotenlinien

$$(18) \quad F(u) du^2 + \Phi(v) dv^2 = 0$$

und als Differentialgleichung der Krümmungslinien nach II. § 3, (11)

$$(19) \quad F(u) du^2 - \Phi(v) dv^2 = 0.$$

Endlich geben die Gleichungen II. § 3, (16), (15) für die mittlere Krümmung, wie es sein muß,

$$h = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0,$$

und für das Krümmungsmaß

$$(20) \quad k = \frac{1}{R_1 R_2} = - \frac{4}{(1 + uv)^4 F(u) \Phi(v)}.$$

Es ist also

$$(21) \quad R_1 = -R_2 = \frac{(1 + uv)^2}{2} \sqrt{F(u) \Phi(v)}.$$

Anmerkung 2. Ein Vergleich von (16) mit II. § 8, (16) lehrt, daß die Parameter u, v auch für die Bildkugel die Parameter der Minimallinien sind, d. h. den Minimallinien der Fläche entsprechen die Minimallinien der Bildkugel, es ist daher das sphärische Bild einer Minimalfläche dem Urbild konform (vgl. § 1, Satz 4). Übrigens folgt dies auch unmittelbar aus (14), (16) und (20), da sich so

$$(22) \quad ds_0^2 = -k ds^2$$

ergibt. Man beweist leicht auch die Umkehrung. Ist die sphärische Abbildung einer Fläche dem Urbild konform, so ist die Fläche entweder eine Minimalfläche oder eine Kugel (vgl. II. S. 31.)

Anmerkung 3. In den Differentialgleichungen der Krümmungslinien und Asymptotenlinien sind die Variabeln getrennt und man erhält daher die endlichen Gleichungen durch Quadratur. Man kann sogar zeigen, daß bei jeder Minimalfläche, auch wenn sie auf beliebige Parameter bezogen ist, die Gleichungen der genannten Flächenkurven durch Quadratur erhalten werden (vgl. Roberts, J. de math. (1) 11 (1846) p. 300).

Anmerkung 4. Aus (18), (13) und II. § 1, (15) ergibt sich, daß die Asymptotenlinien einer Minimalfläche aufeinander senkrecht stehen [vgl. auch I. § 8, Aufg. 9].

§ 5. Spezielle Minimalflächen.

Wir behandeln die

Aufgabe 1. Alle Minimalflächen zu bestimmen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind.¹⁾

Die Aufgabe ist also, die Funktion $F(u)$ und die konjugierte $\Phi(v)$ so zu bestimmen, daß die Formeln § 4, (10) eine auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche darstellen. Zu diesem Zwecke beachten wir, daß jede Rotationsfläche längs der Parallelkreise in sich verschiebbar ist und daher jede Fläche, die auf eine solche abwickelbar ist, längs der Kurven C , die den Parallelkreisen entsprechen, ebenfalls in sich verschoben werden kann. Es seien nun $P(u, v)$ und $P'(u', v')$ zwei Punkte einer solchen Kurve C , so muß nach Rk. u. Fl. II. § 13 das Linienelement und das Krümmungsmaß in P gleich dem Linienelement bzw. Krümmungsmaß in P' sein; wir haben daher nach § 4, (14) und (20)

$$(1) \quad (1 + uv)^2 F(u) \Phi(v) du dv = (1 + u'v')^2 F(u') \Phi(v') du' dv',$$

$$(2) \quad (1 + uv)^4 F(u) \Phi(v) = (1 + u'v')^4 F(u') \Phi(v')$$

und durch Division von (1) und (2)

$$(3) \quad \frac{4 du dv}{(1 + uv)^2} = \frac{4 du' dv'}{(1 + u'v')^2}.$$

Hieraus folgt nach § 4, (16), daß das sphärische Bild von P mit dem von P' symmetrisch oder kongruent ist. Symmetrie ist aber ausgeschlossen, da sonst das sphärische Bild von P durch stetige Bewegung nicht in das von P' übergeführt werden könnte. Die beiden Kugelbilder sind demnach kongruent und können daher nach II. § 11, Satz 3. durch Drehung um eine bestimmte Achse zur Deckung gebracht werden. Wir orientieren nun die Minimalfläche zur Bildkugel so, daß jene Drehachse die z -Achse wird. Die Normale in P muß also

¹⁾ Die auf Rotationsflächen verbiegbaren Minimalflächen bestimmte Bour in seiner Preisschrift über Deformation der Flächen, „Journal de l'écol. polyt.“ cah. 39, p. 99—109. (1862.)

gegen die z -Achse dieselbe Neigung haben wie die in P' . Es ist also $c = c'$ und daher nach § 4, (15)

$$(4) \quad uv = u'v'.$$

Aus (2) und (4) folgt, daß die Funktion $F(u) \cdot \Phi(v)$ ihren Wert nicht ändern darf, wenn $u \cdot v$ konstant bleibt, d. h. $F(u) \cdot \Phi(v)$ ist reine Funktion von $u \cdot v$; bezeichnen wir diese mit φ , so erhalten wir die Funktionalgleichung

$$(5) \quad F(u) \cdot \Phi(v) = \varphi(u \cdot v).$$

Nimmt man hier beiderseits den Logarithmus und differenziert partiell zuerst nach u und dann nach v , so folgt

$$(6) \quad \frac{u F'(u)}{F(u)} = \frac{v \Phi'(v)}{\Phi(v)}.$$

Da in (6) die linke Seite nur von u , die rechte nur von v abhängt, so sind die beiden Seiten gleich einer Konstanten m . Es ist also $u F'(u) : F(u) = v \Phi'(v) : \Phi(v) = m$, oder integriert

$$(7) \quad F(u) = A u^m, \quad \Phi(v) = B v^m,$$

wobei A und B Integrationskonstanten sind. Für eine reelle Fläche muß v zu u konjugiert imaginär sein und ebenso Φ die zu F konjugierte Funktion, (vgl. § 4); m ist daher eine reelle, B die zu A konjugierte Konstante.

Die Gleichungen (7) müssen notwendig erfüllt sein; daß sie auch hinreichend sind, erkennt man wie folgt: Man setze

$$(8) \quad u = r e^{i\varphi}, \quad v = r e^{-i\varphi},$$

und es folgt für das Linienelement der Minimalfläche nach § 4, (14)

$$(9) \quad ds^2 = AB(1 + r^2)^2 r^{2m} (dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Das Linienelement einer Rotationsfläche hat aber nach II. § 7, (4), wenn man u, v in der betreffenden Formel durch U, V ersetzt, die Form

$$(10) \quad ds^2 = \{1 + f'(U)^2\} dU^2 + U^2 dV^2.$$

Setzt man nun

$$AB(1+r^2)^2 r^{2m} dr^2 = \{1 + f'(U)^2\} dU^2,$$

$$AB(1+r^2)^2 r^{2m+2} = U^2,$$

$$\varphi = V,$$

oder

$$(11) \quad U = \sqrt{AB} (1+r^2) r^{m+1}, \quad \frac{dr}{r} = \frac{\sqrt{1+f'(U)^2}}{U} dU,$$

$$\varphi = V,$$

so geht das Linienelement (9) der Minimalfläche in das der Rotationsfläche (10) über. Aus der ersten Gleichung (11) ergibt sich U als Funktion von r und die zweite liefert $f(U)$ und damit die Meridiankurve der Rotationsfläche, auf welche die Minimalfläche abwickelbar ist. Man sieht auch, daß die Kurven, $r = \text{konst.}$, d. h. $uv = \text{konst.}$, der Minimalfläche in die Parallelkreise, die Kurven

$\varphi = \text{konst.}$, d. h. $\frac{u}{v} = \text{konst.}$, der Minimalfläche in die

Meridiane der Rotationsfläche übergehen.

Es gilt also der

Satz 1. Die allgemeinste auf eine Rotationsfläche abwickelbare Minimalfläche erhält man, wenn in den Formeln von Weierstraß, § 4, (11), für $F(u)$ die Funktion

$$F(u) = Au^m$$

gesetzt wird, wobei m eine reelle, A eine komplexe Konstante bedeutet.

Dabei gehen die Kurven $uv = \text{konst.}$ der Minimalfläche in die Parallelkreise, die Kurven

$\frac{u}{v} = \text{konst.}$ der Minimalfläche in die Meridiane der

Rotationsfläche über.

Wir behandeln weiter die

Aufgabe 2. Alle Schraubenflächen, die zugleich Minimalflächen sind, zu finden.

Da nach II. § 14, Satz 3 die Schraubenflächen auf Rotationsflächen abwickelbar sind, so sind die Minimal-schraubenflächen in den in der Aufgabe 1 behandelten

Flächen enthalten. Weiter sind nach II. § 22, Aufgabe 16 auf einer Schraubenfläche die Kurven konstanten Krümmungsmaßes Schraubenlinien. Die Kurven $uv = \text{konst.}$ sind daher nach (7) und § 4, (20) Schraubenlinien oder die Tangenten einer dieser Kurven haben gegen die z -Achse eine konstante Neigung. Es muß also für diese

Kurven $\frac{dz}{ds}$ konstant sein [vgl. Bd. I, § 2, (5)]. Mit (7) erhält man aber aus § 4, (10) und (14).

$$\frac{dz}{ds} = \frac{Au^{m+1}du + Bv^{m+1}dv}{(1+uv)\sqrt{AB}(uv)^m du dv}.$$

Hier muß die rechte Seite, wenn $u = \frac{c}{v}$ gesetzt wird (c eine Konstante), einen konstanten Wert geben, woraus durch eine leichte Rechnung folgt

$$m = -2$$

und der

Satz 2. Setzt man in den Formeln von Weierstraß

$$F(u) = Au^{-2},$$

wo A eine komplexe Konstante ist, so erhält man sämtliche Minimalschraubenflächen.

Nach § 4, (11) erhält man nun als Gleichungen dieser Minimalschraubenflächen mit $F(u) = -Au^{-2}$

$$(12) \quad \begin{aligned} x &= \Re A \left(\frac{1}{u} + u \right), \\ y &= \Re A i \left(\frac{1}{u} - u \right), \\ z &= \Re 2A \lg u, \end{aligned}$$

wobei noch z mit $-z$ vertauscht ist. Für das Linienelement folgt nach § 4, (14)

$$(13) \quad ds^2 = (1+uv)^2 AA_0 (uv)^{-2} du dv,$$

wo A_0 die zu A konjugierte Konstante ist. Um nun in (12) das Reelle vom Imaginären zu trennen, setzen wir

$$u = re^{i\varphi}, \quad A = ae^{i\alpha},$$

worauf folgt

$$(14) \quad \begin{aligned} x &= ar \cos(\varphi + \alpha) + ar^{-1} \cos(\varphi - \alpha), \\ y &= ar \sin(\varphi + \alpha) + ar^{-1} \sin(\varphi - \alpha), \\ z &= 2a \cos \alpha \lg r - 2a \varphi \sin \alpha. \end{aligned}$$

Die Koordinaten x, y, z der Minimalschraubenflächen sind durch (14) als Funktionen der beiden reellen Parameter r und φ dargestellt, a und α sind reelle Konstanten. Für das Linienelement folgt in den neuen Parametern aus (13), da $v = re^{-i\varphi}$, $A_0 = ae^{-i\alpha}$ ist,

$$(15) \quad ds^2 = a^2 (1 + r^{-2})^2 (dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Da nun das Linienelement (15) von der Konstanten α ganz unabhängig ist, so sieht man, daß alle Flächen (14) (welchen Wert auch α haben mag), aufeinander abwickelbar sind. Läßt man also in (14) α stetig sich ändern, so wird dadurch die einzelne Fläche stetig verbogen, bleibt dabei aber stets eine Schraubenfläche und eine Minimalfläche. Diese Flächen sind die von Scherk¹⁾ gefundenen, die wir schon in II. § 14, (25) erhalten haben.

Wir setzen in (14)

$$\text{erstens } \alpha = 0$$

und erhalten

$$(16) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = a \left(e^{\frac{z}{2a}} + e^{-\frac{z}{2a}} \right).$$

Dies ist die Gleichung der Rotationsfläche, die erhalten wird, wenn die Kettenlinie $x = a \left(e^{\frac{z}{2a}} + e^{-\frac{z}{2a}} \right)$ um die z -Achse rotiert, also das Katenoid [vgl. II. § 14, (22)]. Es ist die einzige Rotationsminimalfläche (Schraubenfläche mit der Ganghöhe Null). Wir setzen in (14)

$$\text{zweitens } \alpha = \frac{\pi}{2},$$

worauf folgt

$$(17) \quad z = 2a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$$

¹⁾ Vgl. die Fußnote zu II. S. 111.

Dies ist die Gleichung der Wendelfläche [vgl. II. § 14, (26)]; die Wendelfläche ist daher auf das Katenoid abwickelbar.

§ 6. Assoziierte und adjungierte Minimalflächen.

In § 5 hat sich ergeben, daß die Minimalschraubenflächen stetig so verbogen werden können, daß sie stets Minimalflächen bleiben. Man kann nun allgemeiner fragen, ob nicht jede Minimalfläche einer stetigen Biegung unterworfen werden kann, so daß sie stets eine Minimalfläche bleibt. Dies ist in der Tat der Fall.

Um dies zu beweisen, denken wir uns eine Minimalfläche S mit dem Linienelement

$$(1) \quad ds^2 = (1 + uv)^2 F(u) \Phi(v) du dv,$$

s. § 4, (14). Wir suchen nun sämtliche Minimalflächen, denen dasselbe Linienelement (1) zukommt. Eine dieser sei S' . Für das Linienelement des sphärischen Bildes von S haben wir nach § 4, (22) $ds_0^2 = -k ds^2$, für S' ist analog $ds'_0{}^2 = -k' ds'^2$. Da nun für entsprechende Punkte von S und S' $ds^2 = ds'^2$ und $k = k'$ ist, so folgt

$$(2) \quad ds_0^2 = ds'_0{}^2,$$

oder in Worten: Bildet man entsprechende Partien von S und S' auf die Kugel ab, so sind die Kugelbilder entweder kongruent oder symmetrisch. Das Letztere ist aber ausgeschlossen, da wir angenommen haben, daß S' durch stetige Biegung aus S hervorgeht. Die Kugelbilder sind also kongruent, und S' kann gegen S so orientiert werden, daß sich die sphärischen Bilder entsprechender Teile von S und S' decken, daß also in entsprechenden Punkten die Flächennormalen parallel sind. Jedem Kugelpunkt (u, v) entspricht daher ein Punkt von S und S' und diese beiden Punkte kommen bei der Abwicklung von S' auf S zur Deckung. Also

Satz 1. Sind zwei Minimalflächen S und S' aufeinander abwickelbar, so können sie im Raum so gegeneinander orientiert werden, daß die Flächennormalen in entsprechenden Punkten parallel sind.

Es mögen nun in den Formeln von Weierstraß § 4, (10) $f(u)$ und ihre konjugierte $\varphi(v)$ die Funktionen sein, die S' erzeugen, dann haben wir für das Linien-element von S'

$$(3) \quad ds'^2 = (1 + uv)^2 f(u) \varphi(v) du dv.$$

Da aber $ds = ds'$ ist, so folgt aus (1) und (3)

$$F(u) \Phi(v) = f(u) \varphi(v).$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{f(u)}{F(u)} = \frac{\Phi(v)}{\varphi(v)}.$$

Da die linke Seite reine Funktion von u , die rechte Funktion nur von v ist, so muß jede Seite gleich einer und derselben Konstanten sein; bezeichnen wir diese mit $re^{i\alpha}$ (α reell), so folgt

$$f(u) = re^{i\alpha} F(u), \quad \varphi(v) = \frac{1}{r} e^{-i\alpha} \Phi(v);$$

$\varphi(v)$ muß aber die zu $f(u)$ konjugierte Funktion sein, ebenso wie $\Phi(v)$ die zu $F(u)$ konjugierte ist; daraus folgt $r = 1$ und

$$\begin{aligned} f(u) &= e^{i\alpha} F(u), \\ \varphi(v) &= e^{-i\alpha} \Phi(v), \end{aligned}$$

wo α eine reelle Konstante bedeutet. Wir haben also den

Satz 2. Die allgemeinste Minimalfläche, die durch stetige Biegung aus einer gegebenen hervorgeht, erhält man, wenn die Funktion $F(u)$ in den Formeln von Weierstraß durch $e^{i\alpha} F(u)$ und $\Phi(v)$ durch $e^{-i\alpha} \Phi(v)$ ersetzt wird, wobei α eine reelle Konstante ist. Dabei sind in entsprechenden Punkten der Biegungsflächen nach Satz 1 die Normalen parallel.

Durchläuft α alle möglichen Werte, so erhält man also aus einer gegebenen Minimalfläche durch stetige Biegung ∞^1 andere Minimalflächen. Diese Flächen heißen assoziierte Minimalflächen.¹⁾ Die Schraubenminimal-

¹⁾ Den zu $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ gehörigen Spezialfall kennt man durch O. Bonnet, vgl. „Comptes rendus“ Bd. 37. (1853), p. 532. Wegen des allgemeinen Falls vgl. K. Peterson, „Über Raumkurven und Flächen“,

flächen in § 5 sind in diesem Sinne assoziierte Minimalflächen. Die beiden Flächen insbesondere, die dem

Werte $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ entsprechen, heißen adjungierte

Flächen. Das Katenoid und die Wendelfläche z. B. sind adjungierte Flächen (§ 5).

Die Konstante α hat eine einfache geometrische Bedeutung: Es seien x, y, z die Koordinaten eines Punktes der Fläche S , die der Funktion $F(u)$ entspricht, $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ die Koordinaten des zugeordneten Punktes der zu S assoziierten Fläche S' [entsprechend der Funktion $e^{i\alpha} F(u)$], so erhält man für den Winkel ϑ zweier entsprechender Linienelemente ds und ds_α nach Rk. u. Fl. I. § 15, (14)

$$\cos \vartheta = \frac{dx dx_\alpha + dy dy_\alpha + dz dz_\alpha}{ds ds_\alpha} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \cos \alpha,$$

d. h. $\vartheta = \alpha$. Die Konstante α bedeutet daher den Winkel zwischen zwei entsprechenden Linienelementen von S und S' . Für zwei adjungierte Flächen stehen also zwei entsprechende Linienelemente aufeinander senkrecht.

Benutzt man statt der Formeln § 4, (10) die Formeln (4) desselben Paragraphen, so hat man für die Fläche S

$$(4) \quad x = U_1 + V_1, \quad y = U_2 + V_2, \quad z = U_3 + V_3,$$

und für eine beliebige zu S assoziierte S'

$$(5) \quad \begin{aligned} x_\alpha &= e^{i\alpha} U_1 + e^{-i\alpha} V_1, & y_\alpha &= e^{i\alpha} U_2 + e^{-i\alpha} V_2, \\ z_\alpha &= e^{i\alpha} U_3 + e^{-i\alpha} V_3. \end{aligned}$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhält man aus (5) die zu S adjungierte S_0

$$(6) \quad x_0 = i(U_1 - V_1), \quad y_0 = i(U_2 - V_2), \quad z_0 = i(U_3 - V_3).$$

Leipzig 1868, p. 66, 72 und Bonnets Arbeit im „Journal de l'école polyt.“, cah. 42, p. 8, 73. Die Formeln (5) gibt Peterson in dem genannten Werke, jedoch ohne zu beweisen, daß dadurch alle Minimalflächen erschöpft sind. Hierzu vgl. Schwarz, „Miscellen aus dem Gebiet der Minimalflächen“, J. f. Math. 80 (1875), p. 286.

Mit Hilfe von (4) und (6) kann man den Gleichungen (5) nun die Form

$$(7) \quad \begin{aligned} x_\alpha &= x \cos \alpha + x_0 \sin \alpha, & y_\alpha &= y \cos \alpha + y_0 \sin \alpha, \\ z_\alpha &= z \cos \alpha + z_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

geben. Diese Formeln gestatten eine interessante Frage zu beantworten. Man lasse in (7) α alle möglichen Werte annehmen, worauf man die ganze Schar assoziierter Flächen erhält: auf jeder dieser entspricht einem Wertepaare (u, v) ein ganz bestimmter Punkt: gesucht ist die Kurve, die diese Punkte im Raume bilden. Man hat zu diesem Zwecke in (7) u, v als konstant, α dagegen als veränderlich anzusehen.

Aus (7) folgt, daß identisch die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_\alpha & x & x_0 \\ y_\alpha & y & y_0 \\ z_\alpha & z & z_0 \end{vmatrix} = 0$$

ist, woraus zu schließen ist, daß die Kurve in einer Ebene liegt. Da man weiter sich unschwer überzeugt, daß die Projektionen der Kurve auf die Koordinatenebenen Ellipsen sind, so ist die Kurve selbst eine Ellipse.

Die Formeln (18) und (19) des § 4 geben die Differentialgleichungen der Asymptotenlinien bzw. Krümmungslinien der Minimalfläche S . Ersetzt man hier $F(u)$ und $\Phi(v)$ bezüglich durch $i F(u)$ und $-i \Phi(v)$, so erhält man als Differentialgleichung der Asymptotenlinien

$$F(u) du^2 - \Phi(v) dv^2 = 0$$

und als Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$F(u) du^2 + \Phi(v) dv^2 = 0$$

der zu S adjungierten Minimalfläche S_0 . Man hat daher den

Satz 3. Verbiegt man eine beliebige Minimalfläche S stetig so lange, bis sie die Gestalt der adjungierten Minimalfläche S_0 annimmt, so sind die Asymptotenlinien und Krümmungslinien von S bezüglich in die Krümmungslinien und Asymptotenlinien von S_0 übergegangen.

Bemerkung. Dieser Satz ist ein Spezialfall eines allgemeineren, den wir zum Beweis in die Übungen (vgl. § 33, Aufg. 10) aufgenommen haben.

§ 7. Die Formeln von Schwarz. Bestimmung einer Minimalfläche durch einen gegebenen Streifen.

Die zu der Minimalfläche S adjungierte Minimalfläche S_0 hat nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen folgende Eigenschaften:

1) In entsprechenden Punkten haben die Flächen parallele Normalen,

2) Zwei entsprechende Linienelemente stehen aufeinander senkrecht,

3) Zwei entsprechende Linienelemente sind gleich lang, da ja beide Flächen aufeinander abwickelbar sind.

Diese drei Eigenschaften finden ihren analytischen Ausdruck in den Gleichungen

$$(1) \quad adx_0 + bdy_0 + cdz_0 = 0,$$

$$(2) \quad dx_0 dx + dy_0 dy + dz_0 dz = 0,$$

$$(3) \quad dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen. Löst man diese Gleichungen nach dx_0, dy_0, dz_0 auf, so erhält man wichtige Gleichungen, die Schwarz¹⁾ angegeben hat. Nach Rk. u. Fl. I. Einltg. (16) erhält man aus (1) und (2), wenn ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist,

$$\varrho dx_0 = bdz - cdy, \quad \varrho dy_0 = cdx - adz, \quad \varrho dz_0 = ady - bdx;$$

aus (3) und dem Determinantensatz I, (15) der Einleitung folgt $\varrho = \pm 1$. Berechnet man aber mit Hilfe der Formeln (10) und (15) des § 4 $ady - bdx$, so findet man, daß $+dz_0$ sich ergibt; ϱ ist also gleich $+1$ zu setzen. Es ist daher

$$(4) \quad dx_0 = bdz - cdy, \quad dy_0 = cdx - adz, \quad dz_0 = ady - bdx.$$

Nach § 6, (4) und (6) ist aber

$$(5) \quad 2U_1 = x - ix_0, \quad 2U_2 = y - iy_0, \quad 2U_3 = z - iz_0$$

¹⁾ Schwarz, J. f. Math. Bd. 80, p. 291 (1875).

und daher nach (4)

$$(6) \quad \begin{aligned} 2U_1 &= x - i \int (bdz - cdy), & 2U_2 &= y - i \int (cdx - adz), \\ 2U_3 &= z - i \int (ady - bdx). \end{aligned}$$

Dies sind die wichtigen Formeln von Schwarz. Sie dienen zur Lösung der Aufgabe:¹⁾ eine Minimalfläche zu bestimmen, die durch eine gegebene Kurve geht und längs derselben gegebene Normalen hat. Bedenkt man, daß die Flächenelemente längs der Kurve einen unendlich schmalen Streifen bilden, so kann die genannte Aufgabe auch so formuliert werden: Eine Minimalfläche durch einen gegebenen Streifen zu legen.

Bemerkung. Aus der dritten Formel (4) folgt, daß für eine Minimalfläche $ady - bdx$ ein totales Differential ist, oder daß $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0$ sein muß. Ist die Fläche durch die Gleichung $z = f(x, y)$ gegeben und benützt man die Gleichungen I. § 16, (5), so folgt

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right) = 0.$$

Dies ist genau die Differentialgleichung, die Lagrange durch Variationsrechnung erhalten hat. Ausgerechnet erhält man so Formel (1) von § 3.

Wir wenden nunmehr die Formeln von Schwarz an zur Lösung der oben genannten Björlingschen Aufgabe.

Die Raumkurve möge dadurch gegeben sein, daß die Koordinaten (x, y, z) eines Punktes derselben als analytische Funktionen (d. h. Funktionen, die nach Potenzen des Arguments t entwickelbar und auch auf komplexe t ausdehnbar sind) eines reellen Parameters t seien. Sind weiter a, b, c ebenfalls gegebene analytische Funktionen des Parameters t , so ist in jedem Punkt der Raumkurve eine Richtung gegeben, welche die Normale

¹⁾ Gestellt von Björling, Archiv für Math. IV, p. 290 (1864). Gelöst von Bonnet, Comptes rendus. T. 40, p. 1107 (1855) und T. 42, p. 532 (1856). Wir geben im Text die elegante Lösung, die man Schwarz (a. a. O.) verdankt.

der gesuchten Minimalfläche werden soll. Diese Normale muß natürlich auf der Tangente der Raumkurve senkrecht stehen. Die sechs Funktionen $x, y, z; a, b, c$ müssen daher so gegeben sein, daß sie die Gleichungen

$$(7) \quad adx + bdy + cdz = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

identisch, d. h. für alle Werte von t befriedigen. Die Formeln (6) geben nun unmittelbar die Funktionen U_1, U_2, U_3 und durch Vertauschung von i mit $-i$ die hierzu konjugierten V_1, V_2, V_3 — allerdings zunächst nur für reelle Werte des Parameters t . Da aber diese sechs Funktionen analytische Funktionen von t sind, so hindert uns nichts, dem Parameter t auch komplexe Werte zu geben. Ist t_1 die zu t konjugiert imaginäre Größe, so bestimmen wir eine Fläche durch folgende Formeln

$$(8) \quad \begin{aligned} x' &= U_1(t) + V_1(t_1), & y' &= U_2(t) + V_2(t_1), \\ z' &= U_3(t) + V_3(t_1); \end{aligned}$$

und behaupten nun, daß dies die Gleichungen der gesuchten Fläche sind.

Fürs erste nämlich ist diese Fläche eine Minimalfläche; denn aus (6) folgt mit Beachtung von (7), daß für reelle Werte von t bzw. t_1

$$\begin{aligned} dU_1^2 + dU_2^2 + dU_3^2 &= 0, \\ dV_1^2 + dV_2^2 + dV_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

ist. Diese Gleichungen sind daher Identitäten und werden auch statthaben, wenn t komplexe Werte erhält; U_1, U_2, U_3 , und V_1, V_2, V_3 sind daher die Koordinaten von zwei Minimalkurven, durch deren Translation (vgl. § 4) die Fläche (8) entsteht. Diese ist also sicher eine Minimalfläche und zwar eine reelle, da U_i und V_i konjugierte Funktionen sind.

Weiter ergibt sich für reelle Werte von t ($t = t_1$) aus (8) und den Formeln von Schwarz

$$x' = x(t), \quad y' = y(t), \quad z' = z(t),$$

d. h. die gegebene Kurve liegt auf der durch (8) bestimmten Fläche.

Die Richtungskosinus A, B, C der Normalen der Fläche (8) in einem beliebigen Punkt (t, t_1) bestimmen sich nach II. § 2, (9) aus den Gleichungen

$$A \frac{\partial x'}{\partial t} + B \frac{\partial y'}{\partial t} + C \frac{\partial z'}{\partial t} = 0,$$

$$A \frac{\partial x'}{\partial t_1} + B \frac{\partial y'}{\partial t_1} + C \frac{\partial z'}{\partial t_1} = 0,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1;$$

oder mit Benützung von (8) aus den Gleichungen

$$(9) \quad \Sigma A dU_1 = 0, \quad \Sigma A dV_1 = 0, \quad \Sigma A^2 = 1.$$

Für reelle Werte von t erhält man aus den Gleichungen von Schwarz und wegen (7)

$$(10) \quad \Sigma a dU_1 = 0, \quad \Sigma a dV_1 = 0, \quad \Sigma a^2 = 1.$$

Die Gleichungen (9) und (10) lehren nun aber, daß die Richtungskosinus A, B, C der Fläche (8) für reelle Werte von t , d. h. in Punkten der gegebenen Raumkurve in die gegebenen Größen a, b, c übergehen. Es ist also auch bewiesen, daß die Minimalfläche (8) längs der gegebenen Kurve die vorgeschriebenen Normalen besitzt.

Bemerkung. Die Formeln von Schwarz erfordern drei Quadraturen, durch welche drei willkürliche Konstante eingeführt werden. Diese Konstanten sind notwendig reell, da der Vergleich von (6) mit (5) zeigt, daß die drei Integrale x_0, y_0, z_0 etwas Reelles bedeuten. Bei der Bildung der Flächengleichungen (8) heben sich diese drei Konstanten daher wieder heraus. Es folgt, daß durch einen gegebenen Streifen eine Minimalfläche eindeutig bestimmt ist. Hieraus ergeben sich die Sätze von Schwarz:

Satz 1. Jede auf einer Minimalfläche gelegene Gerade ist eine Symmetrieachse der Fläche.

Satz 2. Schneidet eine Ebene eine Minimalfläche überall senkrecht, so ist sie eine Symmetrieebene der Fläche.

Denn dreht man die Fläche um diese Gerade (in Satz 1) um 180° , so hat sie nach der Drehung längs der Geraden dieselben Normalen wie vorher, und sie muß daher mit der

ursprünglichen Fläche zusammenfallen. Analog ergibt sich der Satz 2.

Nach den Ergebnissen dieses Paragraphen ist eine Minimalfläche durch die Forderung bestimmt, daß eine gegebene Kurve für die Minimalfläche geodätische Linie oder Asymptotenlinie werde; denn im ersten Falle ist längs der Kurve die Hauptnormale, im zweiten Falle die Binormale der Kurve die Normale der Fläche. Soll endlich eine gegebene Kurve Krümmungslinie der gesuchten Fläche werden, so konstruiere man eine der unendlich vielen Evoluten (vgl. I. § 12, Satz 2); die Tangenten dieser geben dann die Normalen der Minimalfläche längs der gegebenen Kurve. In diesem Falle hat man also unendlich viele Lösungen.

3. Die Flächen von konstantem Krümmungsmaß.

§ 8. Allgemeines über Flächen von konstantem Krümmungsmaß.

Nach den Minimalflächen des vorigen Abschnittes wählen wir als zweites Beispiel für die W -Flächen die Flächen von konstantem Krümmungsmaß. Diese sind durch die Gleichung

$$(1) \quad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{R^2}$$

definiert, wo R eine Konstante bedeutet. Je nachdem R reell, unendlich oder rein imaginär ist (also von der Form ri), haben die entsprechenden Flächen in allen ihren Punkten konstantes positives Krümmungsmaß, oder das Krümmungsmaß Null oder konstantes negatives Krümmungsmaß. Diese drei Gattungen von Flächen sind namentlich auch wegen ihres Zusammenhanges mit der sog. nicht-euklidischen Geometrie (s. unten § 13) von besonderem Interesse.

Zunächst zeigen wir, daß jeder der drei Gattungen eine bestimmte Form des Linienelementes entspricht. Zu diesem Zwecke wählen wir als Parameterkurven $v = \text{konst.}$ die geodätischen Linien durch einen

beliebigen Punkt der Fläche (Pol), als Parameterkurven $u = \text{konst.}$ ihre Orthogonaltrajektorien (geodätische Parallelen). Das Linienelement jeder Fläche, bezogen auf diese Parameterkurven, lautet dann nach Rk. u. Fl. II. § 15, (8)

$$(2) \quad ds^2 = du^2 + G dv^2,$$

wo außerdem nach II. § 15, (9)

$$(3) \quad \lim_{u=0} \sqrt{G} = 0, \quad \lim_{u=0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 1$$

ist.

Für das Krümmungsmaß k erhält man nach II. § 13, (13)

$$(4) \quad k = \frac{1}{R^2} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Aus dieser Gleichung nun folgt durch Integration

$$\sqrt{G} = A e^{\frac{i u}{R}} + B e^{\frac{-i u}{R}},$$

wo A, B zunächst noch willkürliche Funktionen von v allein sind: diese aber müssen wegen (3) den Gleichungen

$$A + B = 0, \quad A - B = \frac{R}{i}$$

genügen, aus denen folgt

$$(5) \quad \sqrt{G} = R \left(\frac{e^{\frac{i u}{R}} - e^{\frac{-i u}{R}}}{2i} \right) = R \sin \frac{u}{R}.$$

Wir erhalten nun aus (2) und (5)

1) Für die Flächen von konstantem positivem Krümmungsmaß (R reell $= r$)

$$(6) \quad ds^2 = du^2 + r^2 \sin^2 \frac{u}{r} dv^2; \quad k = \frac{1}{r^2}.$$

2) Für die Flächen von konstantem Krümmungsmaß Null (abwickelbare Flächen, $R = \infty$),

$$(7) \quad ds^2 = du^2 + u^2 dv^2; \quad k = 0.$$

Dies ist einfach das Linienelement der Ebene für Polarkoordinaten.

3) Für die Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß (R rein imaginär $= ri$)

$$(8) \quad ds^2 = du^2 + r^2 \left(\frac{e^{\frac{u}{r}} - e^{-\frac{u}{r}}}{2} \right)^2 dv^2 = du^2 + r^2 \sinh^2 \frac{u}{r} dv^2;$$

$$k = -\frac{1}{r^2}.$$

Da wir im Folgenden wiederholt von den Hyperbelfunktionen Gebrauch machen werden, so möge deren Definition hier angegeben werden: es ist

$$(9) \quad i \sin \frac{u}{ri} = \frac{e^{\frac{u}{r}} - e^{-\frac{u}{r}}}{2} = \sinh \frac{u}{r} \text{ (Sinus hyperbolicus),}$$

$$\cos \frac{u}{ri} = \frac{e^{\frac{u}{r}} + e^{-\frac{u}{r}}}{2} = \cosh \frac{u}{r} \text{ (cosinus hyperbolicus).}$$

Man sieht, daß das Linienelement jeder Fläche von konstantem Krümmungsmaß sich auf eine der Formen (6)–(8) bringen läßt, und es gilt daher der

Satz 1. Alle Flächen, die dasselbe konstante Krümmungsmaß besitzen, lassen sich aufeinander und auf sich selbst abwickeln und zwar auf dreifach unendlich vielen Weisen.

Das letztere bedarf noch eines Beweises. Seien S und S_1 zwei Flächen der genannten Art, so kann auf S als Pol des geodätischen Polarkoordinatensystems ein beliebiger Punkt A , auf S_1 ein beliebiger Punkt A_1 ausgewählt werden. Wegen der Gleichheit der Linienelemente kann nun S auf S_1 abgewickelt werden, so daß A und A_1 sich decken. Der Punkt A von S kann also mit zweifach unendlich vielen Punkten von S_1 zur Deckung kommen. Da weiter in (6)–(8) statt v auch $v + a$, wo a eine beliebige Konstante ist, gesetzt werden kann, ohne daß die Form des Linienelements sich ändert, so kann man noch die eine

Fläche über der anderen um den gemeinsamen Punkt AA_1 drehen. Damit ist gezeigt, daß die Abwicklung in der Tat auf dreifach unendlich viele Arten möglich ist.

Nach dem Satz, den wir soeben bewiesen, kann daher jede Figur auf einer solchen Fläche in der Fläche verschoben werden, wie eine ebene Figur in der Ebene, ohne daß die Längen und Winkel sich ändern. Bei einer Fläche von konstantem Krümmungsmaß kann man also mit demselben Recht von einer Geometrie auf der Fläche sprechen wie von einer Geometrie der Ebene oder der Kugel. In der Tat sind ja die beiden letzteren ebenfalls Flächen von konstantem Krümmungsmaß. Wir kommen hierauf weiter unten in § 11 noch einmal zurück.

§ 9. Die Pseudosphäre.

Wir bestimmen nunmehr die einfachsten Flächen von konstantem Krümmungsmaß. Zunächst bemerken wir, daß nach § 8, (6)—(8) G reine Funktion von u ist: es folgt somit nach Rk. u. Fl. II. § 7, (14) der

Satz 1. Alle Flächen von konstantem Krümmungsmaß sind auf Rotationsflächen abwickelbar.

Es genügt daher, für die drei Fälle die einfachsten Rotationsflächen anzugeben, worauf die allgemeinsten Flächen aus diesen durch Biegung hervorgehen.

1) Die einfachste Fläche von konstantem positivem Krümmungsmaß ist die Kugel. In der Tat erhält das Linienelement der Kugel mit dem Radius r die Form § 8, (6), wenn auf der Kugel u das Komplement der geographischen Breite, v die geographische Länge bedeutet. Da alle Flächen von konstantem positivem Krümmungsmaß auf die Kugel abwickelbar sind, so ist die Geometrie auf diesen Flächen identisch mit der Kugelgeometrie.

2) Die einfachste Fläche von konstantem Krümmungsmaß Null ist die Ebene. Bedeuten u, v Polarkoordinaten in der Ebene, so hat das Linienelement der Ebene in der Tat die Form § 8, (7). Die Geometrie auf allen Flächen von konstantem Krümmungsmaß Null ist identisch mit der ebenen (euklidischen) Geometrie.

3) Es bleiben also nur noch die Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß $= -\frac{1}{r^2}$ zu erledigen.

Um die Rotationsflächen zu finden, sei Γ die Meridiankurve einer dieser in der xz -Ebene. Ist in Fig. 1 M der Krümmungsmittelpunkt von Γ für den Punkt P , so ist nach II. § 7, Satz 4, $PM = \rho$ der eine Hauptkrümmungshalbmesser der zu Γ gehörigen Rotationsfläche in P , der

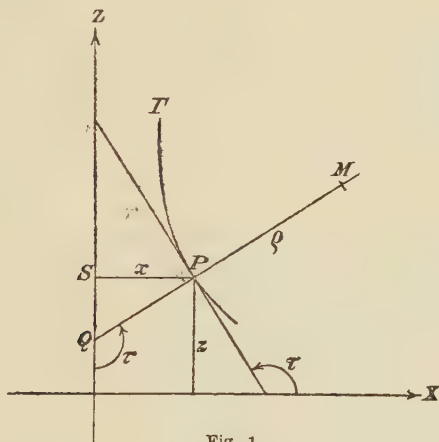


Fig. 1.

andere Hauptkrümmungshalbmesser in P ist das Stück PQ der Kurven-Normalen in P bis zur z -Achse. Es ist also

$$(1) \quad PQ \cdot PM = -r^2.$$

Bezeichnet man mit τ den Neigungswinkel der Meridiantangente in P gegen die x -Achse, so ist $d\tau$ der Kontingenzwinkel in P für Γ und daher [vgl. I. § 3, (7)]

$$(2) \quad ds = \rho d\tau.$$

Weiter ergibt sich aus dem Dreieck PSQ , wo $PS = x$ ist, $PQ = \frac{x}{\sin \tau}$ und daher nach (1) und (2) $\frac{x ds}{\sin \tau d\tau} = -r^2$ oder, da $ds = \frac{dx}{\cos \tau}$ ist [vgl. I. § 2, (5)],

$$(3) \quad x dx = -\frac{r^2}{2} \sin 2\tau d\tau.$$

Hieraus erhält man durch Integration, wenn C eine willkürliche Konstante bedeutet,

$$2x^2 + C = r^2 \cos 2\tau$$

oder auch

$$(4) \quad \operatorname{tg}^2 \tau = \frac{1 - \cos 2\tau}{1 + \cos 2\tau} = \frac{r^2 - 2x^2 - C}{r^2 + 2x^2 + C}.$$

Setzt man noch $r^2 - C = 2b^2$, wo jetzt b^2 die willkürliche Konstante ist und beachtet, daß $\operatorname{tg} \tau = \frac{dz}{dx}$ ist, so folgt aus (4)

$$(5) \quad z = \int \sqrt{\frac{b^2 - x^2}{x^2 + r^2 - b^2}} dx.$$

Dies ist die Gleichung der Meridiankurve Γ . Da b^2 willkürlich ist, so erhält man unendlich viele Meridiankurven und damit unendlich viele Rotationsflächen von konstantem negativem Krümmungsmaß $= -\frac{1}{r^2}$. Es ge-

nügt, die einfachste von diesen zu nehmen. Die Integration von (5), die im allgemeinen auf elliptische Integrale führt, wird für den Fall $b^2 = r^2$ ausführbar. Setzt man unter dieser Voraussetzung $x = r \sin u$, so folgt aus (5) leicht

$$(6) \quad x = r \sin u, \quad z = r \left\{ \lg \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right\}.$$

Durch diese Gleichungen sind x und z als Funktionen des Parameters u definiert, sie stellen daher die Gleichungen der Meridiankurve in der xz -Ebene dar. Diese Kurve heißt die Traktrix; sie ist symmetrisch zur x -Achse, hat die z -Achse zur Asymptote und im Punkte $(x=r, z=0)$ eine Spitze. Man zeigt außerdem leicht, daß das Stück der Tangente zwischen Berührungspunkt und Asymptote konstant $= r$ (vgl. unten S. 42), und daß der Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte eine Kettenlinie ist (vgl. II. § 22, Aufg. 27).

Die Rotationsfläche der Traktrix heißt Pseudosphäre (s. Fig. 2). Man hat daher den

Satz 2. Die einfachste Fläche von konstantem negativem Krümmungsmaß ist die Pseudosphäre. Die Geometrie aller Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß ist identisch mit der Geometrie auf der Pseudosphäre.

Bemerkung. Da die Evolute der Traktrix die Kettenlinie ist, so folgt, daß die Zenträmäntel aller pseudosphärischen Flächen auf das Katenoid abwickelbar sind (vgl. § 2, Schluß).

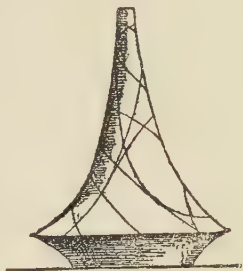


Fig. 2.

Als Gleichungen der Pseudosphäre hat man nun nach (6)

$$(7) \quad x = r \sin u \cos v, \quad y = r \sin u \sin v, \quad z = r \left\{ \lg \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right\},$$

dabei sind die Kurven $u = \text{konst.}$ die Parallelkreise, die Kurven $v = \text{konst.}$ die Meridiane der Pseudosphäre. Für das Linienelement der Pseudosphäre ergibt sich

$$(8) \quad ds^2 = r^2 \operatorname{ctg}^2 u \, du^2 + r^2 \sin^2 u \, dv^2.$$

Wir setzen nun

$$(9) \quad r \operatorname{ctg} u \, du = dU, \text{ oder } U = r \lg \sin u,$$

dann folgt aus (8) für das Linienelement der Pseudosphäre

$$(10) \quad ds^2 = dU^2 + e^{\frac{2U}{r}} dV^2,$$

wenn noch

$$(11) \quad rv = V$$

gesetzt wird; dabei sind wieder die Kurven $U = \text{konst.}$ die Parallelkreise, die Kurven $V = \text{konst.}$ die Meridiane der Pseudosphäre. Setzt man jetzt in (10)

$$(12) \quad U = U_1 + 2\alpha, \quad V = V_1 e^{\frac{-\alpha}{r}},$$

wo α eine willkürliche Konstante bedeutet, so sieht man,

daß das Linienelement (10) in sich selbst transformiert wird. Daraus ergibt sich der

Satz 3. Die Pseudosphäre kann auf sich selbst so abgewickelt werden, daß die Parallelkreise wieder in Parallelkreise und die Meridiane in Meridiane übergehen.

Damit wir von dieser Art der Abwicklung eine klare Vorstellung erhalten, denken wir uns die Pseudosphäre längs eines Meridianes und längs des Parallelkreises in der xy -Ebene aufgeschnitten. Das über der xy -Ebene liegende Stück verschieben wir nun parallel der positiven z -Achse; dasselbe kann dann nach (12) so auf die Pseudosphäre abgewickelt werden, daß die Parallelkreise des Stücks auf Parallelkreise (und damit die Meridiane auf die Meridiane) der Pseudosphäre zu liegen kommen.

Da nun jeder Parallelkreis einer Rotationsfläche eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung ist und diese bei der Biegung sich nicht ändert (vgl. II. § 19, S. 160 ff.) so ist zu schließen, daß bei der Pseudosphäre alle Parallelkreise dieselbe konstante geodätische Krümmung besitzen. Dies ergibt sich auch analytisch sofort aus II. § 19, S. 160; man erhält so

$$(13) \quad \frac{1}{r_v} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u},$$

wo $\frac{1}{r_v}$ die geodätische Krümmung der Kurven $u = \text{konst.}$ bedeutet. Aus (10) folgt

$$\frac{1}{r_v} = \frac{1}{r}.$$

Die Parallelkreise der Pseudosphäre haben also die konstante geodätische Krümmung $\frac{1}{r}$.

Beachtet man nun den Satz I. § 28, Aufg. 36, so sieht man, daß das Stück jeder Meridiantangente der Pseudosphäre zwischen dem Berührungspunkt und der z -Achse konst. $= r$ ist (s. S. 40).

Wir haben nun oben gesehen, daß es außer der Pseudosphäre noch unendlich viele Rotationsflächen von

konstantem negativem Krümmungsmaß gibt. Ohne uns auf die gestaltlichen Verhältnisse dieser hier näher einzulassen, können wir jedenfalls soviel sagen, daß keine von diesen weder auf die Pseudosphäre noch eine auf die andere oder auf sich selbst stetig so verbogen werden kann, daß die Parallelkreise während der Biegung immer Parallelkreise bleiben. Denn dann müßten die Parallelkreise alle dieselbe geodätische Krümmung haben, eine Eigenschaft, die, wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, eben nur die Pseudosphäre besitzt.

§ 10. Die Kurven konstanter geodätischer Krümmung auf den pseudosphärischen Flächen.

Da wir uns im folgenden hauptsächlich mit den Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß, die man auch pseudosphärische Flächen nennt, eingehender beschäftigen werden, so wollen wir uns in diesem Paragraphen über die Kurven konstanter geodätischer Krümmung der pseudosphärischen Flächen einen Überblick verschaffen. Wir werden sehen, daß diese Kurven das Analogon der Kreise in der Ebene bilden.

Es sei C eine beliebige Kurve konstanter geodätischer Krümmung. Wir wählen nun als Parameterkurven $v = \text{konst.}$ die zu C orthogonalen geodätischen Linien und als Parameterkurven $u = \text{konst.}$ die zu C geodätischen Parallelen. Die Kurve C möge dem Parameterwerte $u = 0$ entsprechen.

Das Linienelement der Fläche lautet dann nach Rk. u. Fl. II. § 15, (7)

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + Gdv^2$$

und das Krümmungsmaß k , das also konstant $= -\frac{1}{r^2}$ (r reell) sein soll, ergibt sich nach II. § 13, (13) aus der Gleichung

$$(2) \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Sind $\varphi(v)$ und $\psi(v)$ zwei willkürliche Funktionen von v allein, so lautet das allgemeine Integral von (2)

$$(3) \quad \sqrt{G} = \varphi(v) e^{\frac{u}{r}} + \psi(v) e^{-\frac{u}{r}},$$

und es ist daher nach (1)

$$(4) \quad ds^2 = du^2 + \left\{ \varphi(v) e^{\frac{u}{r}} + \psi(v) e^{-\frac{u}{r}} \right\}^2 dv^2.$$

Nach der Formel (13) des § 9 hat man nun für die geodätische Krümmung $\frac{1}{r_v}$ der Kurven $u = \text{konst.}$

$$(5) \quad \frac{1}{r_v} = \frac{\varphi(v) e^{\frac{u}{r}} - \psi(v) e^{-\frac{u}{r}}}{\varphi(v) e^{\frac{u}{r}} + \psi(v) e^{-\frac{u}{r}}} \cdot \frac{1}{r}.$$

Da die Kurve C ($u = 0$) eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung sein soll, so muß die rechte Seite von (5) für $u = 0$ konstanten Wert besitzen; dies ist nur möglich,

wenn entweder $\varphi(v)$ bzw. $\psi(v) = 0$ oder $\frac{\varphi(v)}{\psi(v)}$ gleich einer

Konstanten ist; $\varphi(v)$ und $\psi(v)$ können nämlich nicht beide zugleich den Wert Null haben, da sonst nach (3) G gleich Null wäre. Jetzt ist aber in allen drei Fällen die rechte Seite von (5) auch für Werte $u \geq 0$ unabhängig von v und man hat daher den

Satz 1. Auf jeder pseudosphärischen Fläche sind die geodätischen Parallelen zu einer Kurve konstanter geodätischer Krümmung wieder Kurven konstanter geodätischer Krümmung.

Wir untersuchen nun die genannten Möglichkeiten näher. Es wird sich zeigen, daß auf jeder pseudosphärischen Fläche drei verschiedene Arten von Kurven konstanter geodätischer Krümmung existieren.

Es sei also:

$$\text{I. } \psi(v) = 0.$$

Der Fall $\varphi(v) = 0$ ist nicht davon verschieden, wie man durch Vertauschung von u mit $-u$ sofort sieht.

Aus (5) ergibt sich, daß die geodätische Krümmung aller Kurven $u = \text{konst.}$ denselben Wert $\frac{1}{r}$ besitzt. Ersetzt man in (4) $\int \varphi(v) dv$, wieder durch v , so erhält das Linienelement der pseudosphärischen Fläche die Form

$$(I) \quad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{r}} dv^2.$$

Man sagt, das Linienelement (I) besitze parabolischen Typus. Man hat daher den

Satz 2. Für das Linienelement vom parabolischen Typus (I) sind die geodätischen Parallelen $u = \text{konst.}$ Kurven von der konstanten geodätischen Krümmung $\frac{1}{r}$.

Man vgl. hierzu die Parallelkreise der Pseudosphäre sowie die Form des Linienelements (10) von § 9.

II. Wir nehmen an, $\frac{\psi(v)}{\varphi(v)}$ sei gleich einer positiven Konstanten, die wir mit e^a bezeichnen. Wir setzen

$$\psi(v) = e^a \varphi(v), \quad u = U + \frac{a \cdot r}{2}, \quad \varphi(v) dv = \frac{e^{\frac{-a}{2}}}{2} \cdot dV.$$

Für das Linienelement erhält man nach (4) in den neuen Parametern

$$ds^2 = dU^2 + \left\{ \frac{e^{\frac{U}{r}} + e^{\frac{-U}{r}}}{2} \right\} dV^2$$

oder, indem man sogleich wieder kleine Buchstaben u, v schreibt und § 8, (9) beachtet,

$$(II) \quad ds^2 = du^2 + \cosh^2 \frac{u}{r} dv^2 = du^2 + \left\{ \frac{e^{\frac{u}{r}} + e^{\frac{-u}{r}}}{2} \right\} dv^2.$$

Man sagt, das Linienelement (II) sei von hyperbolischem Typus.

Für die geodätische Krümmung $\frac{1}{r_v}$ der Kurven $u = \text{konst.}$ erhält man aus (II) nach § 9, (13)

$$\frac{1}{r_v} = \frac{e^{\frac{2u}{r}} - 1}{e^{\frac{2u}{r}} + 1} \cdot \frac{1}{r},$$

woraus zu schließen ist, daß die geodätische Krümmung aller Kurven $u = \text{konst.}$ kleiner als $\frac{1}{r}$ ist und daß die

Kurve $u = 0$ selbst eine geodätische Linie ist; aus (II) folgt, daß v der Bogen derselben ist. Man hat daher den

Satz 3. Für das Linienelement (II) vom hyperbolischen Typus hat jede geodätische Parallele $u = \text{konst.}$ eine geodätische Krümmung

kleiner als $\frac{1}{r}$. Die Kurve $u = 0$ ist eine geodätische

Linie und v ihr Bogen.

Da u der Bogen der die Kurve $u = 0$ senkrecht schneidenden geodätischen Linien ist, und zwar von der Kurve $u = 0$ an gerechnet, so sieht man, daß für die geodätischen Parallelen die geodätische Krümmung um so mehr dem Wert $\frac{1}{r}$ sich nähert, je weiter sie von der Kurve $u = 0$ entfernt sind. Erst für $u = \infty$ wird die geodätische Krümmung $= \frac{1}{r}$, weshalb man die Kurven von der konstanten geodätischen Krümmung $\frac{1}{r}$ auch Grenzkreise nennt. Wegen der Bezeichnung „Kreis“ siehe weiter unten.

III. Ist endlich $\frac{\psi(v)}{\varphi(v)}$ in (5) gleich einer negativen Konstanten, die wir mit $-e^\alpha$ bezeichnen, so setzen wir ähnlich wie oben

$$\psi(v) = -e^\alpha \varphi(v), \quad u = U + \frac{\alpha r}{2}, \quad \varphi(v) dv = \frac{r}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}} dV$$

und erhalten dann, wenn wir sogleich wieder statt (U, V) kleine Buchstaben (u, v) gebrauchen und § 8, (9) beachten

$$(III) \, ds^2 = du^2 + r^2 \sinh^2 \frac{u}{r} dv^2 = du^2 + r^2 \left\{ \frac{e^{\frac{u}{r}} - e^{-\frac{u}{r}}}{2} \right\}^2 dv^2.$$

Diese Form des Linienelements nennt man den elliptischen Typus. Für die geodätische Krümmung

$\frac{1}{r_v}$ der Kurven $u = \text{konst.}$ erhält man aus (III) nach § 9, (13)

$$\frac{1}{r_v} = \frac{e^{\frac{2u}{r}} + 1}{e^{\frac{2u}{r}} - 1} \cdot \frac{1}{r}.$$

Man sieht, daß jetzt die geodätische Krümmung aller Kurven $u = \text{konst.}$ größer als $\frac{1}{r}$ ist und dieselbe erst für $u = \infty$ gerade $= \frac{1}{r}$ wird. Die Form (III) des Linienelements ergab sich schon in § 8, (8), woraus zu schließen ist, daß die geodätischen Linien $v = \text{konst.}$ (s. § 8) alle durch einen Punkt gehen; von diesem Punkt aus wird die Länge u der geodätischen Linien gemessen. Man hat so den

Satz 4. Für das Linienelement (III) vom elliptischen Typus hat jede geodätische Parallele $u = \text{konst.}$ eine geodätische Krümmung größer als $\frac{1}{r}$. Die zu den geodätischen Parallelen orthogonalen geodätischen Linien gehen alle durch einen Punkt, von dem aus die Länge u der geodätischen Linien gemessen wird.

Im Falle III stellen die Kurven konstanter geodätischer Krümmung $u = \text{konst.}$ das genaue Analogon der Kreise in der Ebene dar. In der Tat, befestigt man in einem Punkt P einer pseudosphärischen Fläche einen Faden und spannt ihn straff über die Fläche, so legt er sich als geodätische Linie auf die Fläche; bewegt

man nun das Ende, indem der Faden immer straff auf der Fläche aufliegt, so beschreibt dieses nach Satz 4 eine Linie konstanter geodätischer Krümmung. Aus diesem Grund nennt man jede Kurve konstanter geodätischer Krümmung auf einer pseudosphärischen Fläche auch einen geodätischen Kreis. Im elliptischen Falle nennt man den gemeinsamen Schnittpunkt der zu dem geodätischen Kreis orthogonalen geodätischen Linien den Mittelpunkt des Kreises. Im parabolischen Falle treffen sich, wie die Parallelkreise und Meridiane der Pseudosphäre zeigen, die zu dem geodätischen Kreis senkrechten geodätischen Linien im Unendlichen. Die Grenzkreise können somit als geodätische Kreise mit unendlich fernem Zentrum bezeichnet werden, analog den Geraden (als Kreise aufgefaßt) der Ebene. Im hyperbolischen Falle, wo also die geodätischen Kreise

eine geodätische Krümmung kleiner als $\frac{1}{r}$ besitzen, kann

keine der zu einem geodätischen Kreis orthogonalen geodätischen Linien die andere treffen. Denn würden zwei derselben sich im Punkte A treffen und die geodätische Linie $u=0$ (vgl. Satz 3) in den Punkten B und C , so hätten wir ein von geodätischen Linien gebildetes Dreieck ABC , in dem die Winkelsumme mindestens gleich zwei Rechten wäre, während sich im nächsten Paragraphen ergeben wird, daß die Winkelsumme stets kleiner als zwei Rechte ist. Wir bezeichnen in diesem Fall den Mittelpunkt des geodätischen Kreises als imaginär. Man hat daher den

Satz 5. Der Mittelpunkt eines geodätischen Kreises liegt im Endlichen, unendlich fern oder ist imaginär, je nachdem die geodätische Krümmung desselben größer, gleich oder kleiner als $\frac{1}{r}$ ist. (Vgl. hierzu auch § 14.)

Das Linienelement ist in allen drei Fällen von der Form

$$ds^2 = du^2 + f(u)^2 dv^2 = f(u)^2 \left\{ \frac{du^2}{f(u)^2} + dv^2 \right\},$$

wo $f(u)$ eine Funktion von u allein ist; setzt man nun

$$\frac{du}{f(u)} = dU, \quad dv = dV,$$

so erhält das Linienelement die isotherme Form

$$ds^2 = F(U) \{dU^2 + dV^2\}.$$

Man hat also den

Satz 6. Auf jeder pseudosphärischen Fläche bilden die zu einem geodätischen Kreis gezogenen geodätischen Parallelen zusammen mit den hierzu orthogonalen geodätischen Linien ein Isothermensystem.

Vgl. hierzu den allgemeinen Satz II. § 22, Aufg. 39.

§ 11. Die Trigonometrie auf den Flächen von konstantem Krümmungsmaß.

Wir knüpfen nun wieder an die am Schluß von § 8 gemachte Bemerkung an, daß jede Figur einer Fläche von konstantem Krümmungsmaß in der Fläche verschoben werden kann, ohne daß die Längen und Winkel sich ändern, und daß man deshalb mit demselben Recht von einer Geometrie auf der Fläche sprechen kann wie von einer Geometrie der Ebene oder der Kugel. Um den Charakter dieser Geometrie näher kennen zu lernen, suchen wir in diesem Paragraphen Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks, dessen Seiten drei geodätische Linien der Fläche sind, herzustellen. Das Folgende bezieht sich also wieder auf alle drei Arten von Flächen von konstantem Krümmungsmaß.

Die Ecken des geodätischen Dreiecks seien A, B, C (s. Fig. 3). Als Parameterkurven $v = \text{konst.}$ wählen wir, wie in § 8, die geodätischen Linien durch den Punkt A (Pol), und zwar möge die geodätische Linie AB dem Werte $v = 0$ entsprechen, die Linie AC dem Werte $v = v_0$. Die Orthogonaltrajektorien der geodätischen Linien durch A seien die Kurven $u = \text{konst.}$, wo u den Bogen der geodätischen Linien durch A , von A aus gemessen, bedeute. Speziell sei $AB = u_1$, $AC = u_2$. Nach § 8, (2) und (5) hatten

wir für das Linienelement einer Fläche von konstantem Krümmungsmaß $= \frac{1}{R^2}$

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + G dv^2, \quad G = R^2 \sin^2 \frac{u}{R},$$

wo die Konstante R entsprechend den drei Fällen reell, rein imaginär oder unendlich groß ist. Ist ϑ der Winkel, den BC in irgend einem Punkt P (s. Fig. 3), mit der

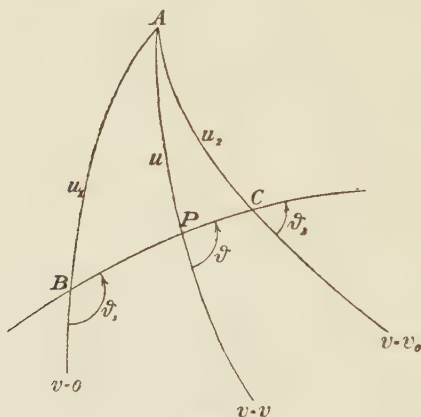


Fig. 3.

durch P gehenden Parameterlinie $v = \text{konst.}$ (AP) bildet, so lautet die Differentialgleichung der geodätischen Linie BC nach Rk. u. Fl. II. § 16, (7) wegen $E = 1$

$$(2) \quad d\vartheta = -\frac{d\sqrt{G}}{du} dv$$

(dort mit ϑ_1 bezeichnet); außerdem ist nach II. § 16, (2) und (1) dieses Paragraphen

$$(3) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{G} \frac{dv}{du}.$$

Eliminiert man aus (2) und (3) dv und integriert so folgt, wenn a eine Integrationskonstante ist,

$$(4) \quad \sqrt{G} \sin \vartheta = a.$$

Hat ϑ für den Punkt B und C bezüglich die Werte ϑ_1 und ϑ_2 , so ist nach (1) und (4)

$$(5) \quad R \sin \frac{u_1}{R} \sin \vartheta_1 = R \sin \frac{u_2}{R} \sin \vartheta_2 = a.$$

Eliminiert man weiter aus (1), (3) und (4) ϑ und dv , so erhält man für den Bogen s von BC

$$(6) \quad s = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G-a^2}} du.$$

Setzt man hier den Wert von G aus (1) ein und integriert, so folgt

$$\frac{s}{R} = \arcsin \sqrt{\frac{R^2 \sin^2 \frac{u_2}{R} - a^2}{R^2 - a^2}} - \arcsin \sqrt{\frac{R^2 \sin^2 \frac{u_1}{R} - a^2}{R^2 - a^2}},$$

oder mit Hilfe von (5)

$$(7) \quad \frac{s}{R} = \arcsin \frac{R \sin \frac{u_2}{R} \cos \vartheta_2}{\sqrt{R^2 - a^2}} - \arcsin \frac{R \sin \frac{u_1}{R} \cos \vartheta_1}{\sqrt{R^2 - a^2}}.$$

Setzt man nun

$$(8) \quad \sin \varphi = \frac{R \sin \frac{u_2}{R} \cos \vartheta_2}{\sqrt{R^2 - a^2}}, \quad \sin \psi = \frac{R \sin \frac{u_1}{R} \cos \vartheta_1}{\sqrt{R^2 - a^2}},$$

so folgt hieraus und aus (5)

$$(9) \quad \cos \varphi = \frac{R \cos \frac{u_2}{R}}{\sqrt{R^2 - a^2}}, \quad \cos \psi = \frac{R \cos \frac{u_1}{R}}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

und es ist nach (7)

$$\frac{s}{R} = \varphi - \psi.$$

Für diese Gleichung bilde man $\cos \frac{s}{R}$ und $\sin \frac{s}{R}$ und benutze die Gleichungen (8) und (9): es folgt so

$$\cos \frac{s}{R} = \frac{R^2 \cos \frac{u_1}{R} \cos \frac{u_2}{R} + R^2 \sin \frac{u_1}{R} \sin \frac{u_2}{R} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{R^2 - a^2},$$

$$\sin \frac{s}{R} = \frac{R^2 \cos \frac{u_1}{R} \sin \frac{u_2}{R} \cos \vartheta_2 - R^2 \sin \frac{u_1}{R} \cos \frac{u_2}{R} \cos \vartheta_1}{R^2 - a^2}.$$

Multipliziert man nun die erste dieser Gleichungen mit $\cos \frac{u_2}{R}$, die zweite mit $\sin \frac{u_2}{R} \cos \vartheta_2$ und dann weiter die erste mit $\sin \frac{u_2}{R} \cos \vartheta_2$, die zweite mit $-\cos \frac{u_2}{R}$ und addiert in beiden Fällen, so gibt eine leichte Rechnung mit Benutzung von (5)

$$\cos \frac{u_1}{R} = \cos \frac{u_2}{R} \cos \frac{s}{R} + \sin \frac{u_2}{R} \sin \frac{s}{R} \cos \vartheta_2$$

$$\sin \frac{u_1}{R} \cos \vartheta_1 = \sin \frac{u_2}{R} \cos \frac{s}{R} \cos \vartheta_2 - \cos \frac{u_2}{R} \sin \frac{s}{R}.$$

Bezeichnet man die Seiten des geodätischen Dreiecks ABC mit a, b, c , die Winkel mit α, β, γ , so erhält man aus (5) und den beiden letzten Gleichungen die Grundformeln der Trigonometrie auf den Flächen von konstantem Krümmungsmaß

$$\sin \frac{c}{R} \sin \beta = \sin \frac{b}{R} \sin \gamma \quad (\text{Sinusformel}),$$

$$(10) \quad \cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R} + \sin \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R} \cos \gamma \quad (\text{Kosinusformel}),$$

$$\sin \frac{c}{R} \cos \beta = \sin \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R} - \cos \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R} \cos \gamma.$$

Da jede der Ecken ABC als Pol betrachtet werden kann, so können hier noch a, b, c und α, β, γ entsprechend zyklisch vertauscht werden.

Der Unterschied für die drei Gattungen von Flächen von konstantem Krümmungsmaß ist nun folgender:

1) Für die Flächen von konstantem positivem Krümmungsmaß ist R in (10) reell. Da auf der Kugel die Großkreise geodätische Linien sind, so gelten die Formeln (10) auch für ein sphärisches Dreieck. In der Tat sind die Formeln (10) für $R=1$ identisch mit den Grundformeln der sphärischen Trigonometrie.

2) Für die Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß ist R rein imaginär $=ri$, wo r reell ist. Die Formeln (10) erhalten in diesem Falle durch Einführen der Hyperbelfunktionen reelle Gestalt [vgl. § 8, (9)].

3) Für die Flächen von konstantem Krümmungsmaß Null (Ebene) gelten streng genommen die obigen Entwicklungen nicht, da $R=\infty$ ist. Behandelt man indessen diesen Fall genau wie oben für sich, so erhält man Formeln, die aus (10) für $R=\infty$ hervorgehen. Die Formeln (10) gelten somit für alle drei Fälle. In der Tat erhält man aus (10) für $\lim R=\infty$ die Formeln der ebenen Trigonometrie.

Sätze über die Winkelsumme eines Dreiecks.

Wie in der sphärischen Trigonometrie, so leitet man aus (10) leicht die Formel

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \frac{a}{R}$$

oder

$$(12) \quad \cos (\pi - \alpha) = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos \frac{a}{R}$$

ab. Hieraus schließen wir:

1) Für die Ebene und die Flächen von konstantem Krümmungsmaß Null, für die $R=\infty$ ist, erhält man

$$\cos (\pi - \alpha) = \cos (\beta + \gamma).$$

Aus dieser Gleichung und den analogen, durch zyklische Vertauschung hieraus hervorgehenden Gleichungen folgt

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

und daher der

Satz 1. In der Ebene und auf den abwickelbaren Flächen ist die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck gleich zwei Rechten.

2) Für die Kugel und für die Flächen von konstantem positivem Krümmungsmaß, für die R reell ist, erhält man, da $\cos \frac{\alpha}{R} < 1$ ist, aus (12)

$$\cos(\pi - \alpha) > \cos(\beta + \gamma)$$

und hieraus, sowie aus den analogen Ungleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

Satz 2. Auf der Kugel und auf den Flächen von konstantem positivem Krümmungsmaß ist die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck größer als zwei Rechte.

3) Für die Pseudosphäre und die Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß ist R rein imaginär $= ri$ und daher $\cos \frac{\alpha}{ri} > 1$, wie sich aus der Reihenentwicklung ergibt. Man hat somit nach (12)

$$\cos(\pi - \alpha) < \cos(\beta + \gamma)$$

und die analogen Ungleichungen. Es folgt

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

und der

Satz 3. Auf der Pseudosphäre und auf den Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß ist die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck kleiner als zwei Rechte.

Man vergleiche auch in Beziehung auf Satz 1—3 II. § 16 Schluß.

§ 12. Sätze über Parallelen.

Wir untersuchen noch das Verhalten geodätischer Linien im Unendlichen oder die Frage der Parallelen. Zu diesem Zwecke denken wir uns auf einer Fläche von konstantem Krümmungsmaß einen Punkt C (s. Fig. 4) und eine geodätische Linie Γ und suchen die geodätischen Linien durch C , die Γ erst im Unendlichen schneiden (Parallelen zu Γ).

Sei B ein beliebiger Punkt von Γ , $CB = a$ und der spitze Winkel, den CB mit Γ bildet, β . Aus der dritten

Formel (10) von § 11 erhält man durch zyklische Vertauschung

$$\sin \frac{b}{R} \cos \alpha = \sin \frac{c}{R} \cos \frac{a}{R} - \cos \frac{c}{R} \sin \frac{a}{R} \cos \beta.$$

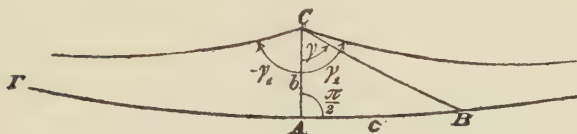


Fig. 4.

Bestimmt man nun eine Strecke c , die der Gleichung

$$\sin \frac{c}{R} \cos \frac{a}{R} - \cos \frac{c}{R} \sin \frac{a}{R} \cos \beta = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \frac{c}{R} = \operatorname{tg} \frac{a}{R} \cos \beta$$

genügt, und trägt diese Strecke von B aus auf demjenigen Teil von Γ , der Schenkel des spitzen Winkels β ist, ab bis A , so lehrt die erste Formel dieses Paragraphen, daß

der Winkel BAC des Dreiecks $ABC = \frac{\pi}{2}$ ist. CA ist

also das Lot von C auf Γ . Man leitet weiter wie in der sphärischen Trigonometrie aus den Formeln (10) des § 11 leicht für das bei A rechtwinklige Dreieck ABC die Beziehung

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{c}{R} = \operatorname{tg} \gamma \sin \frac{b}{R}$$

ab.

Für die Pseudosphäre ist $R = ri$ und nach (1) und § 8, (9) daher

$$\frac{e^{\frac{c}{r}} - e^{-\frac{c}{r}}}{e^{\frac{c}{r}} + e^{-\frac{c}{r}}} = \frac{e^{\frac{b}{r}} - e^{-\frac{b}{r}}}{2} \operatorname{tg} \gamma.$$

Läßt man nun den Punkt B auf Γ immer weiter von A sich entfernen, so erhält man schließlich für $c = \pm\infty$ aus der letzten Gleichung

$$(2) \quad \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \pm e^{\frac{b}{r}}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich für γ zwei Werte: γ_1 und $2\pi - \gamma_1 (= -\gamma_1)$. Diejenigen beiden von C ausgehenden geodätischen Linien, die mit CA den Winkel γ_1 bzw. $-\gamma_1$ bilden, schneiden daher die Γ erst im Unendlichen. Nennt man den Winkel γ_1 den Parallelitätswinkel, so folgt der

Satz 1. Durch einen Punkt C einer pseudosphärischen Fläche gibt es zwei verschiedene geodätische Linien, die mit einer gegebenen geodätischen Linie Γ parallel sind. Der Parallelitätswinkel γ_1 hängt nach (2) von dem senkrechten geodätischen Abstand b des Punktes C von Γ ab.

Aus (2) folgt, daß γ_1 sich um so mehr $\frac{\pi}{2}$ nähert, je kleiner b ist, d. h. rückt C gegen A , so treten die beiden Parallelen mehr und mehr in eine zusammen.

Analog beweist man den

Satz 2. Auf den abwickelbaren Flächen (Ebene) gibt es zu einer gegebenen geodätischen Linie durch einen gegebenen Punkt nur eine, auf den Flächen von konstantem positivem Krümmungsmaß (Kugel) keine Parallele.

§ 13. Die Nicht-Euklidische Geometrie.

Ist die Geometrie auf den Flächen von konstantem Krümmungsmaß schon an sich interessant, so wird dieses Interesse durch den schönen Zusammenhang dieser Geometrie mit der sog. Nicht-Euklidischen Geometrie in erheblichem Maße verstärkt.

Die über viele Jahrhunderte sich erstreckenden mathematischen Untersuchungen¹⁾, die schließlich zur Nicht-

¹⁾ Wegen des folgenden vgl. P. Stäckel und Fr. Engel, „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß“, Leipzig 1895, sowie den Artikel III A B 1. in der Encykl. der math. Wiss. (F. Enriques „Prinzipien der Geometrie“).

Euklidischen Geometrie geführt haben, knüpfen an das berühmte fünfte Postulat von Euklids Elementen an, das wir wegen seiner Wichtigkeit wörtlich zitieren.¹⁾

„Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ’ ἀπειρον συμπίπτειν, ἐφ’ ἃ μέρη εἶσιν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.“

Oder in der Übersetzung:

„Zwei Gerade einer Ebene, die mit einer dritten, und auf derselben Seite von dieser, Winkel bilden, deren Summe kleiner als zwei Rechte ist, treffen sich, hinreichend verlängert.“

Dieses Postulat ist gleichwertig mit der Behauptung, daß durch einen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden nur eine Parallele zu dieser gezogen werden kann. Es besitzt im Gegensatz zu den übrigen Postulaten, mit deren Hilfe Euklid sein System aufbaut, nicht denselben hohen Grad von Evidenz. Darum waren die Anstrengungen der bedeutendsten Mathematiker von Ptolemäus (87—165 n. Chr.) bis zu Gauß darauf gerichtet, das fünfte Postulat mit Hilfe der übrigen zu beweisen. Trotz der schönen Resultate einzelner Mathematiker wie des Pater Girolamo Saccheri (1667—1733), eines Lambert (1728—1777) oder Legendre (1752—1833) sind alle diese Versuche gescheitert, so daß Gauß (als erster) zu der Überzeugung kam, daß das Parallelenspostulat unbeweisbar sei. Von diesem Standpunkt aus lag es nahe, eine dem Parallelenspostulate entgegengesetzte Annahme zu machen und zu untersuchen, wie sich jetzt der Aufbau der Geometrie gestalten würde. Man weiß heute, daß Gauß von 1816 an die Grundlagen hierzu aufgestellt hat. Der erste Mathematiker aber, der öffentlich (1829) die Möglichkeit einer vom Parallelenspostulat unabhängigen Geometrie aussprach, war der Russe Nikolai Lobatschefskij.²⁾ Fast um dieselbe Zeit (1832) und unabhängig von ihm veröffentlichte Johann

¹⁾ Kritische Ausgabe von I. L. Heiberg, 1, Leipzig 1883.

²⁾ Vgl. Fr. Engel, Nik. Iwan. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen, 1. Teil: Die Übersetzung, 2. Teil: Anmerkungen, Lobatschefskijs Leben und Schriften, Register, Leipzig 1898 und 1899.

Bolyai seine Schrift,¹⁾ die ähnliche Resultate enthielt. Das von Lobatschefskij-Bolyai erhaltene Lehrgebäude der Geometrie kann kurz dadurch charakterisiert werden, daß durch einen Punkt der Ebene zwei Parallelen mit einer Geraden möglich sind und daß die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte ist. Für dieses wie auch für das Euklidische System ist die Gerade eine offene Linie von unendlicher Länge. Man kann aber auch voraussetzen, daß die Gerade eine geschlossene Linie ist und eine endliche Länge besitzt. Diese Annahme führt auf das System von B. Riemann.²⁾ In der Geometrie von Riemann gibt es durch einen Punkt zu einer Geraden keine Parallele und die Winkelsumme des Dreiecks ist größer als zwei Rechte. Diese drei untereinander gleichberechtigten Systeme der Geometrie von Lobatschefskij-Bolyai, Euklid und Riemann, die man nach F. Klein kurz als hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch bezeichnen kann, faßt man unter dem Namen Nicht-Euklidische Geometrie (= imaginäre, absolute, allgemeine Geometrie, Pangeometrie) zusammen. Da die Geometrie von Lobatschefskij-Bolyai für die Vorstellung erhebliche Schwierigkeiten bereitete, so fand sie zunächst wenig Beachtung: auf dies weist schon der Name „imaginäre“ Geometrie hin. Man hielt die anschauliche Geometrie Euklids für die allein mögliche und gültige. Diese Sachlage änderte sich mit einem Schlage durch die schöne Entdeckung von E. Beltrami³⁾ (1868), wonach die Lobatschefskijsche Geometrie eine sehr einfache und anschauliche Deutung durch die Geometrie auf den Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes erhielt. Damit hätten wir den Kontakt mit den

¹⁾ Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens usw. in W. Bolyais Tentamen I, für sich neu hrsggeg. Leipzig 1903. Wegen der weiteren Literatur über die beiden Bolyai vgl. den oben zitierten Enzyklopädieartikel.

²⁾ B. Riemann, „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.“ Gött. Abh. 13, 1—20. 1868 oder Riem. Werke Seite 254.

³⁾ E. Beltrami, „Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giorn. di mat. 6, 285—315, 1868. — Interprétation de la géométrie non-euclidienne. Trad. par J. Hoüel, Ann. Ec. Norm. 6, 251—288. Paris 1868.

flächentheoretischen Entwicklungen der letzten Paragraphen gewonnen.

In diesen haben wir die pseudosphärische Geometrie so dargestellt, daß die Identität der Lobatschefskischen Geometrie mit der Geometrie auf den pseudosphärischen Flächen fast unmittelbar evident ist: Man sehe irgend eine pseudosphärische Fläche als Lobatschefskische Ebene an und die geodätischen Linien der Fläche als Repräsentanten der Geraden, so gelten in dieser — wir wollen sagen: „Scheinebene“ alle Postulate Euklids, nur das Parallelenpostulat nicht. Wir müssen es uns freilich versagen, dies im Einzelnen nachzuweisen. Der Leser möge z. B. die Hilbertschen¹⁾ Axiome der Verknüpfung, Anordnung und Kongruenz auf ihre Gültigkeit für die pseudosphärischen Flächen untersuchen. Mit der Beiziehung der im folgenden Paragraphen zu entwickelnden konformen Abbildung dürfte der Nachweis im Einzelnen nicht schwierig sein. Jedenfalls stimmen die Formeln (10) des § 11 vollständig mit den trigonometrischen Formeln, wie sie für das Dreieck in der hyperbolischen Geometrie gelten, überein. Auch hat sich ergeben, daß die Winkelsumme eines (geodätischen) Dreiecks auf den pseudosphärischen Flächen wie in der Geometrie von Lobatschefskij kleiner als 180° ist, und daß durch einen Punkt zu einer geodätischen Linie zwei Parallelen möglich sind.

Die Beltramische Entdeckung ist historisch aus zwei Gründen von großer Wichtigkeit geworden; einmal weil man jetzt für die hyperbolische Geometrie eine fast ebenso anschauliche Deutung besaß wie bisher in der Euklidischen Ebene für die parabolische Geometrie, dann aber ganz besonders auch deshalb, weil jetzt aufs klarste erwiesen war, daß die hyperbolische Geometrie ebenso wenig wie die Euklidische Geometrie zu Widersprüchen führen kann. Denn etwaige Widersprüche müßten ja auch Widersprüche in der Geometrie der pseudosphärischen Flächen, also, da diese im Euklidischen Raum liegen, für die Euklidische Geometrie nach sich ziehen. Sehr rasch setzte sich nun-

¹⁾ Vgl. D. Hilbert, „Grundlagen der Geometrie“, 3. Aufl. Leipzig und Berlin, 1909.

mehr die Überzeugung durch, daß die hyperbolische, parabolische und elliptische Geometrie drei vollständig gleichberechtigte Systeme darstellen. Wie die Geometrie von Lobatschefskij mit der Geometrie auf den Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes identifiziert werden kann, so kann man die Riemannsche Geometrie mit der Geometrie auf den Flächen von konstantem positivem Krümmungsmaß, speziell mit der Kugelgeometrie in Zusammenhang bringen. Diese letztere Art der Veranschaulichung der Riemannschen Geometrie begegnet aber einer kleinen Schwierigkeit, insofern als der Satz „Zwei Punkte bestimmen eine Gerade“ dann eine Ausnahme erleidet, wenn die Punkte Gegenpunkte der Kugel sind. Man muß sich daher entweder entschließen, immer zwei Gegenpunkte zusammen als geometrisches Bild des Wortes „Punkt“ aufzufassen oder aber — und das kommt im Grunde auf dasselbe hinaus — man projiziere nach dem Vorgange von Klein die Kugelpunkte vom Zentrum aus und erhält so ein Strahlenbündel. Nennt man nun die Geraden des Bündels „Punkte“, die Büschel desselben „Gerade“ und erklärt man die „Entfernung zweier Punkte“ durch den Winkel der zwei entsprechenden Geraden des Bündels, so erhält man in der Geometrie des Bündels ein vollkommenes Spiegelbild der in der elliptischen Ebene geltenden Geometrie. Die Geometrie der abwickelbaren Flächen stimmt natürlich mit der Euklidischen Geometrie überein, da ja diese Flächen in die Euklidische Ebene abgewickelt werden können.

Nachdem so für zweidimensionale Gebilde der parabolischen Geometrie (Beispiel: Ebene) die elliptische (Beispiel: Kugel) und die hyperbolische (Beispiel: Pseudosphäre) als logisch gleichberechtigt an die Seite gestellt war, lag es nahe, analoge Überlegungen für den dreidimensionalen Raum anzustellen, also zu fragen, ob vielleicht auch im physischen Raum statt der seither allgemein angenommenen parabolischen (Euklidischen) Geometrie die elliptische oder hyperbolische gelte. Die logische Möglichkeit aller drei Systeme ist ja verbürgt; welches nun im physischen Raum tatsächlich gilt, das ist eine für die Gestaltung des Weltbildes ungemein wichtige und interessante Frage, die nur durch Erfahrung

entschieden werden kann. Man müßte möglichst große Dreiecke nehmen und die Winkelsumme dieser untersuchen. Keines der bis jetzt gemessenen Dreiecke hat aber eine Winkelsumme ergeben, deren Abweichung von 180° nicht durch Beobachtungsfehler hätte erklärt werden können. Daraus darf nun aber nicht geschlossen werden, daß tatsächlich die Euklidische Geometrie im Erfahrungsraume gilt. Denn es ist klar, daß bei sehr großen Werten der Konstanten R in den Formeln (10) des § 11 eine Abweichung von 180° erst bei ziemlich großen Dreiecken zu erwarten ist. Wenn also bei den tatsächlich gemessenen Dreiecken sich bis jetzt keine Differenz ergeben hat, so bleibt es durchaus nicht ausgeschlossen, daß bei viel größeren Dreiecken eine solche sich einstellen könnte. Für den uns zugänglichen Teil des Raumes kann man jedenfalls sagen, daß bis jetzt das System von Euklid mit den Tatsachen in vollkommenem Einklang steht. Doch steht nichts im Wege, zur Berechnung eines gewöhnlichen Raumdreiecks die Formeln (10) des § 11 zu nehmen, wobei dann für R eine hinreichend große reelle oder rein imaginäre Konstante zu nehmen wäre. Es ist nun sehr interessant zu sehen, wie bei der einen oder der anderen Annahme das „Weltbild“ sich gestalten würde. Bei positivem Krümmungsmaß würde die Gerade (wie der Großkreis einer Kugel) eine geschlossene Linie bilden. Dies würde auch der Weg eines Lichtstrahls sein, und ein Beobachter müßte, falls er selbst und die Sonne im Raume ruhen und das Licht keine Absorption im Raume erleiden würde, an der der Sonne gegenüberstehenden Stelle des Himmels ein ebenso großes und ebenso helles Bild der Sonne sehen. Der Raum wäre nicht mehr unendlich groß und es hätten in demselben nur eine endliche Anzahl von Weltkörpern Platz. Es wäre damit u. a. die Frage nach den Grenzen des Raumes auf eine analoge Weise erledigt, wie die Frage nach der Grenze der Erdoberfläche durch die Kugelgestalt derselben. Es ist klar, daß unsere Anschauungen über das Weltbild fundamentale Änderungen erfahren müßten.¹⁾

¹⁾ Wir verweisen in dieser Beziehung auf die interessante Abhandlung von P. Harzer, „Die Sterne und der Raum“, Antrittsrede gehalten am 5. März 1908. Jahresber. d. Deutsch. Math. Vrgg. Bd. 17.

§ 14. Konforme Abbildung der pseudosphärischen Flächen auf die Halbebene.

Den klarsten Einblick in die Geometrie auf den pseudosphärischen Flächen erhält man durch eine gewisse konforme Abbildung dieser Flächen auf die Halbebene; es ist die Abbildung, die bei den funktionentheoretischen Untersuchungen von Klein und Poincaré eine große Rolle spielt.

Wir gehen von der parabolischen Form des Linienelements [vgl. § 10, (I)] der pseudosphärischen Flächen

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{r}} dv^2$$

aus. Dies ist zugleich das Linienelement der Pseudosphäre [§ 9, (10)] und die Kurven $u = \text{konst.}$ sind ihre Parallelkreise. Die Differentialgleichung der Minimallinien der Fläche lautet:

$$dv \pm i e^{-\frac{u}{r}} du = 0,$$

und eine der unendlich vielen möglichen konformen Abbildungen wird daher nach Rk. u. Fl. II. § 10 durch die Gleichungen

$$(2) \quad x = v, \quad y = r e^{-\frac{u}{r}}$$

vermittelt. Das Linienelement der Fläche in den Parametern x, y lautet

$$(3) \quad ds^2 = \frac{r^2}{y^2} (dx^2 + dy^2),$$

woraus in der Tat folgt, daß die Gleichungen (2) eine konforme Abbildung der Fläche auf die Ebene vermitteln. Setzen wir noch

$$(4) \quad x + iy = \omega, \quad x - iy = \omega_0,$$

S. 237 (1908). Weiter auf den bekannten Vortrag von Helmholtz, „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“, Vorträge und Reden, 5. Aufl. Bd. 2. Braunschweig 1903, S. 28 und auf den Vortrag von K. Schwarzschild, „Über das zulässige Krümmungsmaß des Raumes“, Vierteljahrsschr. der Astr. Gesellsch., 35. Jahrg., Leipzig 1900.

so hat man für das Linienelement der Fläche

$$(5) \quad ds^2 = -\frac{4r^2}{(\omega - \omega_0)^2} d\omega d\omega_0,$$

wo jetzt ω und ω_0 die Parameter der Minimallinien der Fläche und der xy -Ebene sind. Aus den Abbildungsformeln (2) schließen wir, daß den Parallelkreisen $u = \text{konst.}$ der Pseudosphäre die Parallelen zur x -Achse, den Meridianen die Parallelen zur y -Achse entsprechen. Da weiter y stets positiv ist, so ist die Fläche auf die Hälfte der xy -Ebene konform abgebildet, für welche y positiv ist; diese sei der Kürze halber als die positive Halbebene bezeichnet; y wird nur dann $= 0$, wenn $u = \infty$ ist, was nach § 9, (7) und (9) (dort $U = \infty$) den unendlich fernen Punkten der Pseudosphäre entspricht. Die x -Achse ist also das Bild der unendlich fernen Punkte der Fläche. Wir wollen sie daher die Grenzgerade nennen.

Welches ist nun das Bild der geodätischen Linien? Durch Elimination von ϑ aus den Gleichungen (3) und (4)

des § 11 erhält man, da hier $G = e^{\frac{2u}{r}}$ ist, für die geodätischen Linien die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{du} = \frac{ae^{-\frac{u}{r}}}{\sqrt{e^{\frac{2u}{r}} - a^2}}$$

oder integriert

$$v = \frac{r}{a} \sqrt{1 - a^2 e^{-\frac{2u}{r}}} + b$$

oder nach (2)

$$(6) \quad (x - b)^2 + y^2 = \frac{r^2}{a^2},$$

wo a und b willkürliche Konstanten bedeuten. Das Bild der geodätischen Linien der Fläche sind daher Halbkreise, welche ihren Mittelpunkt in der Grenzgeraden (x -Achse) haben. Da nun durch zwei beliebige Punkte der Halbebene stets ein und nur ein solcher Halbkreis geht, so folgt, daß zwei beliebige Punkte einer Fläche von konstantem negativem Krümmungsmaß stets durch eine und nur durch eine geodätische Linie verbunden werden können.

Für den Bogen s einer geodätischen Linie erhält man nach § 11, (6)

$$s = r \lg \left\{ e^{\frac{u}{r}} + \sqrt{e^{\frac{2u}{r}} - a^2} \right\} + C$$

oder nach (2)

$$s = r \lg \left\{ \frac{r}{y} + \sqrt{\frac{r^2}{y^2} - a^2} \right\} + C.$$

Rechnet man den Bogen s von dem Punkt aus, der sich in den höchsten Punkt des Bildkreises in der xy -Ebene [$y = \frac{r}{a}$ nach (6)] abbildet, so hat man

$$(7) \quad s = r \lg \left\{ \frac{r}{ay} + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{r^2}{y^2} - a^2} \right\}.$$

In der Tat wird $s = 0$ für $y = \frac{r}{a}$. Auf dem Bildkreis der geodätischen Linie betrachten wir nun folgende vier Punkte: einmal die „unendlich fernen Punkte“ U_1 und U_2 , d. h. die Schnittpunkte des Kreises mit der Grenzgeraden, dann die Bilder P_0 und P_1 der Endpunkte des geodätischen Bogens s , von denen P_0 der höchste Punkt des Kreises sein möge. Projiziert man diese vier Punkte von einem beliebigen Punkt der Kreisperipherie (z. B. U_1) aus durch vier Strahlen, so bilden diese ein gewisses Doppelverhältnis, von dem man leicht zeigt, daß sein Wert gerade durch den Klammerausdruck unter dem Logarithmus in (7) dargestellt ist. Daraus folgt allgemein: Die geodätische Entfernung zweier Punkte der pseudosphärischen Fläche erhält man, wenn der Logarithmus des Doppelverhältnisses, das die Bildpunkte der zwei Punkte mit den beiden Schnittpunkten des Bildkreises und der Grenzgeraden bestimmen, mit r multipliziert wird.

Nennt man nun die Halbkreise der euklidischen Halbebene, die die Grenzgerade senkrecht schneiden, und also Bilder der geodätischen Linien der pseudosphärischen Fläche sind, „Scheingerade“, die Schnittpunkte mit der Grenzgeraden ihre unendlich fernen Punkte und versteht man unter der Entfernung zweier Punkte den r -fachen Logarithmus des oben genannten Doppelverhältnisses, so

hat man jetzt in der euklidischen Ebene nach den Erörterungen des § 13 ein getreues Abbild der hyperbolischen Geometrie. Es wäre z. B. gar nicht schwer die Formeln (10) des § 11 für ein von Scheingeraden begrenztes Dreieck abzuleiten.

Zwei Scheingerade¹⁾ schneiden sich entweder gar nicht oder sie sind „parallel“ — die Bildkreise berühren sich — oder sie schneiden sich in einem einzigen im Endlichen gelegenen Punkte. Da ferner durch einen beliebigen Punkt zwei Kreise gelegt werden können, welche ihre Mittelpunkte auf der Grenzgeraden haben und einen beliebigen Bildkreis berühren, so sieht man, daß durch einen beliebigen Punkt zu einer Scheingeraden zwei Parallelen gezogen werden können.

Welches ist nun das Bild der Kurven konstanter geodätischer Krümmung der pseudosphärischen Flächen? Um diese Frage zu beantworten, ziehen wir alle Bildkreise, die durch einen beliebigen Punkt der positiven Halbebene hindurchgehen; dieselben gehen auch durch das Spiegelbild des Punktes bezüglich der Grenzgeraden und bilden ein Kreisbüschel, dessen Kreise Bilder von geodätischen Linien durch einen Punkt der pseudosphärischen Fläche sind. Nach § 10 sind die Orthogonaltrajektorien dieser geodätische Kreise; wegen der konformen Abbildung sind daher die Orthogonaltrajektorien des Kreisbüschels die Bilder jener geodätischen Kreise. Diese Orthogonaltrajektorien sind aber selbst wieder Kreise und diese sind daher die Bilder von geodätischen Kreisen, deren geodätische Krümmung nach § 10, Satz 4, $> \frac{1}{r}$ ist. Daß auch in den übrigen Fällen, wenn also die geodätische Krümmung des geodätischen Kreises gleich oder kleiner als $\frac{1}{r}$ ist, das Bild desselben stets ein Kreis ist, erkennt man dadurch, daß man für die Kurve Γ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \varrho^2$$

mit Hilfe der Formel (53) von II. § 19 die geodätische

1) Wir empfehlen dem Leser, die einfachen Zeichnungen für das Folgende sich selbst anzufertigen.

Krümmung $\frac{1}{r_\gamma}$ in Bezug auf das Linienelement (3) bildet.

Eine leichte Rechnung gibt die Formel

$$(8) \quad \frac{1}{r_\gamma} = \frac{1}{r} \cdot \frac{b}{\varrho},$$

welche zeigt, daß in der Tat $\frac{1}{r_\gamma}$ einen konstanten Wert

besitzt. Wir unterscheiden nun wieder wie in § 10 drei Fälle:

I. $b > \varrho$, oder $\frac{1}{r_\gamma} > \frac{1}{r}$. Es liegt dann das Bild des

geodätischen Kreises ganz im Innern der positiven Halbebene (d. h. des Teils der xy -Ebene, für welchen $y > 0$ ist), wir wollen dieses Bild der Kürze halber selbst wieder einen geodätischen Kreis nennen. Die Kreise nun, welche diesen letzteren und die Grenzgerade orthogonal schneiden, sind Bilder von denjenigen geodätischen Linien der Fläche, welche den geodätischen Kreis der Fläche senkrecht schneiden. Diese Kreisschar bildet ein Büschel von Kreisen, welche alle durch zwei Punkte der (ganzen) xy -Ebene hindurch gehen. Der in der positiven Halbebene gelegene Punkt ist das Bild des Mittelpunktes des geodätischen Kreises auf der Fläche. Die zu dem Kreisbüschel orthogonalen Kreise, soweit sie in der positiven Halbebene liegen, sind die Bilder der geodätischen Parallelen zu dem geodätischen Kreis und haben nach

(8) alle eine geodätische Krümmung $> \frac{1}{r}$. Es ist dies also genau der in § 10 als „elliptisch“ bezeichnete Fall (s. auch oben).

II. $b = \varrho$ oder $\frac{1}{r_\gamma} = \frac{1}{r}$. Der geodätische Kreis in

der xy -Ebene berührt die Grenzgerade in einem Punkt P . Die orthogonalen geodätischen Linien haben zu Bildern die Schar von Kreisen, die alle durch P gehen und dort eine zur y -Achse parallele gemeinsame Tangente besitzen. Die geodätischen Linien der Fläche gehen daher alle durch

einen unendlich fernen Punkt. Die zu der genannten Kreisschar orthogonale besteht aus den Kreisen, welche die Grenzgerade in P berühren, es sind die Bilder der geodätischen Parallelen zu dem geodätischen Kreis. Wie man sieht, sind dies Bilder von Grenzkreisen der Fläche, und der Punkt P ist das Bild des unendlich fernen Mittelpunkts all dieser Grenzkreise. Dies ist der parabolische Fall des § 10.

III. $b < \varrho$ oder $\frac{1}{r_y} < \frac{1}{r}$. Der geodätische Kreis schnei-

det die Grenzgerade in zwei Punkten P und Q . Die Kreise der xy -Ebene, welche ersteren und die Grenzgerade senkrecht schneiden, haben in diesem Falle keine reellen Punkte gemein; es sind diese Kreise die Bilder der zum geodätischen Kreis auf der Fläche orthogonalen geodätischen Linien im hyperbolischen Falle des § 10. Die Bilder der geodätischen Parallelen bestehen aus der Schar von Kreisen, welche durch P und Q gehen. Die geodätische

Krümmung dieser geodätischen Kreise ist stets $< \frac{1}{r}$. Unter

diesen befindet sich auch eine geodätische Linie (vielmehr das Bild einer solchen), nämlich der Halbkreis über PQ . Die Schar von geodätischen Kreisen kann daher auch aufgefaßt werden als die geodätischen Parallelen zu einer geodätischen Linie (vgl. § 10).

Man kann nun die Abbildung, die Beltrami in seiner berühmten Arbeit (vgl. § 13) benutzt hat, aus der in diesem Paragraphen angegebenen in folgender Weise ableiten. Man beschreibe um einen beliebigen Punkt (Ursprung) der Grenzgeraden eine Kugel, deren Radius der Einfachheit halber $=1$ sein möge, und projiziere die xy -Ebene vom obersten Punkt der Kugel stereographisch (vgl. Rk. u. Fl. II. § 11) auf die Kugeloberfläche. Die Grenzgerade geht dabei in einen größten Kreis K über und die die Grenzgerade senkrecht schneidenden Kreise projizieren sich auf die Kugel als Kreise k , deren Ebenen auf der Ebene des Kreises K senkrecht stehen. Die pseudosphärische Fläche ist jetzt auf die Kugel konform abgebildet und den geodätischen Linien der Fläche entsprechen die Kreise k . Nunmehr projiziere man die Punkte der

Kugeloberfläche orthogonal auf die Ebene des Kreises K (xz -Ebene); die Bilder der Kugelpunkte fallen alle ins Innere bzw. auf den Rand des Kreises K und die Projektionen der Kreise k gehen in Gerade über. Die pseudosphärische Fläche ist jetzt aufs Innere des Kreises K (aber nicht mehr konform) abgebildet und die geodätischen Linien haben zu Bildern gerade Linien; der Kreis K ist das Bild der unendlich fernen Punkte der Fläche. Das ist die berühmte Beltramische Abbildung (vgl. hierzu II. § 22, Aufg. 31).

4. Regelflächen.

§ 15. Das Linienelement der Regelflächen. Allgemeine Eigenschaften.

Erklärung. Eine Regelfläche oder Linienfläche entsteht durch eine stetige Folge von einfach un-

endlich vielen Geraden; diese heißen die Erzeugenden der Regelfläche. Je nachdem zwei konsequente Erzeugende stets sich schneiden oder nicht, nennt man die Regelfläche abwickelbar (s. Rk. u. Fl. I. § 10) oder windschief (vgl. das einmantlige Hyperboloid).

Zur analytischen Darstellung einer Regelfläche ziehe man auf dieser eine beliebige Kurve C (Direktrix), die sämtliche Erzeugende treffen möge (s. Fig. 5). Ist $P(x, y, z)$ ein Punkt der Regelfläche, dessen Erzeugende die Direktrix im Punkt $Q(x_1, y_1, z_1)$ unter einem Winkel ϑ trifft

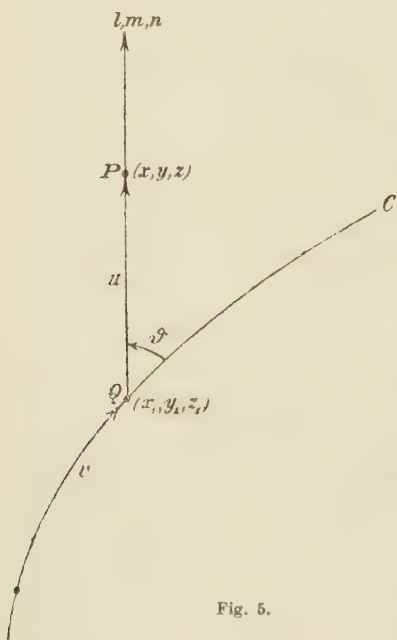


Fig. 5.

und sind x_1, y_1, z_1 gegebene Funktionen des Bogens v der Direktrix und ebenso die Richtungskosinus l, m, n von QP , so hat man, wenn noch $QP = u$ gesetzt wird, als Gleichungen der allgemeinsten Regelfläche

$$(1) \quad x = x_1 + lu, \quad y = y_1 + mu, \quad z = z_1 + nu;$$

denn ändert sich hier u allein, so durchläuft der Punkt (x, y, z) die Erzeugende QP ; ändern sich dagegen u und v zugleich, so durchläuft der Punkt (x, y, z) der Reihe nach alle Erzeugenden. Die Kurven $v = \text{konst.}$ sind also die Erzeugenden; die Kurve $u = 0$ ist die Direktrix; jede Kurve $u = c$ schneidet auf den Erzeugenden überall dasselbe Stück c (von der Direktrix aus gemessen) ab. Da die Erzeugenden geodätische Linien der Regelfläche sind, so sieht man, daß zwei beliebige orthogonale Trajektorien der Erzeugenden (geodätische Parallelen) (II. § 15, Satz 2.) auf allen diesen gleiche Strecken abschneiden.

Um zunächst den Ausdruck für das Linienelement der Fläche $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ zu bilden, bezeichnen wir durch Striche über den Größen ihre Ableitungen nach v und setzen zur Abkürzung

$$(2) \quad \begin{aligned} l'^2 + m'^2 + n'^2 &= A, \\ l'x'_1 + m'y'_1 + n'z'_1 &= B, \\ lx'_1 + my'_1 + nz'_1 &= \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Dabei sind $A, B, \cos \vartheta$ reine Funktionen von v ; außerdem ist, da l, m, n Richtungskosinus sind und v den Bogen der Direktrix bedeutet,

$$(3) \quad \begin{aligned} l^2 + m^2 + n^2 &= 1, \\ x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 &= 1. \end{aligned}$$

Aus (1) erhält man nunmehr für das Linienelement der Regelfläche nach II. § 1, (9) und (10).

$$(4) \quad ds^2 = du^2 + 2 \cos \vartheta du dv + (Au^2 + 2Bu + 1) dv^2.$$

Führt man hier für u durch die Gleichung

$$u = u_1 - \int \cos \vartheta dv$$

den neuen Parameter u_1 ein, so verschwindet der Koeffizient von $du_1 dv$, d. h. die Kurven $u_1 = \text{konst.}$ sind die Ortho-

gonaltrajektorien der Erzeugenden $v = \text{konst.}$ Man hat daher den

Satz. Die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden jeder Regelfläche ergeben sich durch eine Quadratur.

Nimmt man eine dieser Orthogonaltrajektorien zur Direktrix, so ist für diesen Fall $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Zieht man durch einen beliebigen Raumpunkt die Parallelen zu den Flächenerzeugenden, so erhält man einen Kegel, den sogenannten Leit- oder Richt-Kegel. Aus einer um jenen Punkt als Mittelpunkt mit dem Radius 1 geschlagenen Kugel wird von dem Leitkegel die „sphärische Indikatrix“ ausgeschnitten. Wird als die Spitze des Leitkegels der Ursprung genommen, so sind l, m, n die Koordinaten der sphärischen Indikatrix.

Von Wichtigkeit sind noch folgende Größen: der Winkel $d\varphi$, den zwei konsekutive Erzeugende v und $v + dv$ miteinander bilden, ihr Minimalabstand $d\sigma$ und der Wert von u im Fußpunkt von $d\sigma$ auf der Erzeugenden v .

Für $d\varphi$ erhält man nach (2) und I. Einleitung (9)

$$(5) \quad d\varphi^2 = dl^2 + dm^2 + dn^2 = A dv^2;$$

$d\varphi$ ist auch das Bogenelement der sphärischen Indikatrix. Um die Werte für die beiden andern Größen zu finden, lassen wir in (4) v und dv konstant und bestimmen u und du so, daß ds ein Minimum wird. Man differenziere daher die rechte Seite von (4) einmal partiell nach u , dann nach du und setze die jedesmaligen Werte gleich Null. Man erhält so

$$du = -\cos \vartheta dv, \quad u = -\frac{B}{A}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß A nicht gleich Null ist. In diesem Falle wäre nach (2) $l = c_1$, $m = c_2$, $n = c_3$, wo c_1, c_2, c_3 drei Konstante bedeuten; d. h. die Regelfläche ist dann ein Zylinder. Für das Folgende schließen wir diesen trivialen Fall aus.

Es ist also der Fußpunkt des Minimalabstandes auf der Erzeugenden v , der sogenannte Zentralpunkt gegeben durch

$$(6) \quad u = -\frac{B}{A}.$$

Die Ebene durch die Erzeugende und den Minimalabstand im Zentralpunkt nennt man die Zentral-ebene; sie ist die Tangentialebene an die Regelfläche im Zentralpunkt.

Setzt man endlich in (4)

$$du = -\cos \vartheta dv, \quad u = -\frac{B}{A},$$

so folgt für den Minimalabstand $d\sigma$ selbst

$$(7) \quad d\sigma = \sqrt{\frac{A \sin^2 \vartheta - B^2}{A}} dv.$$

Der Ort der Zentralpunkte der Erzeugenden bildet auf der Fläche eine gewisse Kurve, die sogenannte Striktionslinie (vgl. hierzu die allgemeine Definition der Striktionslinie eines Kurvensystems in II. § 20); ihre Gleichung ist durch (6) gegeben. Ist $B=0$, so ist die Direktrix selbst die Striktionslinie.

Für abwickelbare Flächen ist $d\sigma=0$, dieselben sind daher durch die Gleichung

$$A \sin^2 \vartheta - B^2 = 0$$

definiert; die Striktionslinie fällt in diesem Falle mit der Rückkehrkante zusammen.

Bemerkung. Man beachte, daß die Striktionslinie einer Regelfläche im allgemeinen keine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden ist; auch ist $d\sigma$ nicht das Linienelement der Striktionslinie, wie sich schon im allgemeinen Falle in II. § 20 ergeben hat. Um dies auch hier noch einmal einzusehen, konstruiere man drei konsequente Erzeugende e_1, e_2, e_3 der Fläche. Ist P_1 auf e_2 der Fußpunkt des kürzesten Abstands zwischen e_2 und e_1 und ebenso P_2 auf e_2 der Fußpunkt des kürzesten Abstands zwischen e_2 und e_3 , so ist P_1 im Allgemeinen von P_2 verschieden. Um die Striktionslinie zu erhalten, hätte man auf jeder Erzeugenden den P_1 auf e_2 entsprechenden Punkt zu konstruieren und alle diese Punkte zu verbinden.

Man sieht so ein, daß die Linienelemente der Striktionslinie im Allgemeinen auf den Erzeugenden nicht senkrecht stehen. Wenn aber P_1 mit P_2 auf e_2 und ebenso die entsprechenden Punkte auf den übrigen Erzeugenden immer zusammenfallen, dann ist die Striktionslinie Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden. Ist in diesem Falle die Striktionslinie keine Gerade, so steht jede Erzeugende auf zwei konsekutiven Linienelementen, d. h. auf der Schmiegungebene der Striktionslinie senkrecht. Die Erzeugenden sind daher die Binormalen einer Raumkurve und diese ist Striktionslinie der Regelfläche. Ist endlich die Striktionslinie eine Gerade, so ist diese nur dann eine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden, wenn diese die Gerade senkrecht schneiden. Also nur in den genannten beiden Fällen ist die Striktionslinie zugleich Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden. Wie man sieht ist in beiden Fällen die Striktionslinie geodätische Linie der Fläche (vgl. II. § 20).

§ 16. Deformation der Regelflächen.

Wir nehmen nun an, daß in dem Ausdruck § 15, (4) für das Linienelement einer Regelfläche die Funktionen A, B, ϑ , bekannte Funktionen von v seien, und stellen uns die Aufgabe, sämtliche Regelflächen zu finden, denen dieses Linienelement zukommt. Die Lösung ist ziemlich einfach. Da nämlich $A, B, \cos \vartheta$ drei gegebene Funktionen von v sind, so sind aus den 5 Gleichungen § 15, (2) und (3) die Größen $l, m, n; x_1, y_1, z_1$ als Funktionen von v zu bestimmen. Da eine von diesen willkürlich bleibt, so folgt der

Satz 1. Es gibt unendlich viele Regelflächen, die dasselbe Linienelement haben, oder jede Regelfläche ist stetig deformierbar, wobei sie stets Regelfläche bleibt.

Um nun alle diese zu demselben Linienelement ds gehörigen Regelflächen explizit zu erhalten, bestimmen wir zunächst drei Funktionen l, m, n von v , die den Gleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} l^2 + m^2 + n^2 &= 1, \\ l'^2 + m'^2 + n'^2 &= A \end{aligned}$$

genügen. Der ersten dieser Gleichungen wird genügt, wenn man

$$(2) \quad l = \sin \varphi \cos \psi, \quad m = \sin \varphi \sin \psi, \quad n = \cos \varphi$$

setzt, wobei φ und ψ zunächst noch willkürliche Funktionen von v sind. Aus der zweiten Gleichung (1) folgt nun $\varphi'^2 + \psi'^2 \sin^2 \varphi = A$ oder

$$(3) \quad \psi = \int \frac{\sqrt{A - \varphi'^2}}{\sin \varphi} dv.$$

Die Funktion φ von v bleibt willkürlich; aus (3) ergibt sich ψ und aus (2) l, m, n . Da φ eine beliebige Funktion von v ist, so folgt, daß der Richtkegel der Regelfläche willkürlich angenommen werden kann. Ist dieser angenommen, sind also l, m, n bestimmte Funktionen von v , so erhält man die Koordinaten x_1, y_1, z_1 der Direktrix aus den Gleichungen

$$(4) \quad \begin{aligned} lx'_1 + my'_1 + nz'_1 &= \cos \vartheta, \\ l'x'_1 + m'y'_1 + n'z'_1 &= B, \\ x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 &= 1. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieses Systems geschieht am einfachsten, wenn wir zuerst die Hilfsgröße

$$(5) \quad H = \begin{vmatrix} l & l' & x'_1 \\ m & m' & y'_1 \\ n & n' & z'_1 \end{vmatrix}$$

berechnen.

Durch Quadrieren dieser Gleichung folgt wegen (1) und (4) für H

$$(6) \quad H^2 = A \sin^2 \vartheta - B^2$$

und zwar ist H wegen § 15, (7) für eine nicht abwickelbare Fläche von Null verschieden. Man erhält nun x'_1, y'_1, z'_1 aus drei linearen Gleichungen, nämlich den zwei ersten von (4) und aus (5).

Es folgt so

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= l \cos \vartheta + \frac{B}{A} l' + \frac{H}{A} (m n' - n m'), \\
 (7) \quad y'_1 &= m \cos \vartheta + \frac{B}{A} m' + \frac{H}{A} (n l' - l n'), \\
 z'_1 &= n \cos \vartheta + \frac{B}{A} n' + \frac{H}{A} (l m' - m l')
 \end{aligned}$$

und hieraus durch Quadraturen x_1, y_1, z_1 . Da nunmehr die sechs Funktionen l, m, n, x_1, y_1, z_1 von v bestimmt sind, so geben die Gleichungen § 15, (1) die Flächen-gleichungen. H ist nach (6) mit doppelten Vorzeichen behaftet, man erhält daher bei gegebenem Leitkegel zwei verschiedene Flächen. Wir haben so den

Satz 2. Jede Regelfläche kann so verbogen werden, daß ihr Leitkegel eine willkürliche Gestalt erhält, und zwar auf zwei verschiedene Arten.

Wir behandeln noch die Frage:

Läßt sich eine Regelfläche so deformieren, daß eine Kurve auf ihr eine Gerade wird?

Nimmt man an, die Direktrix sei die Kurve und es sei möglich, die Fläche so zu verbiegen, daß die Direktrix zur z -Achse wird, so hat man, da ja v den Bogen der Direktrix bedeutet, für die verbogene Direktrix die Gleichungen

$$(8) \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = v.$$

Da ferner ϑ der Winkel ist, den die Erzeugende im Punkte v mit der Direktrix macht, so setzen wir nach (2)

$$(9) \quad l = \sin \vartheta \cos \psi, \quad m = \sin \vartheta \sin \psi, \quad n = \cos \vartheta.$$

Die Gleichungen (8), (9) und § 15, (1) definieren eine Regelfläche mit der z -Achse als Direktrix. Damit diese Fläche auf die gegebene abwickelbar sei, bestimmen wir in (9) ψ als Funktion von v so, daß die beiden Regelflächen dasselbe Linienelement haben. Die sechs Funktionen in (8) und (9) müssen daher den Gleichungen § 15, (2) und (3) genügen. Die letzte Gleichung (2) und die Gleichungen (3) in § 15 sind von selbst erfüllt. Aus der zweiten Gleichung § 15, (2) folgt

$$(10) \quad B = \frac{d \cos \vartheta}{dv}.$$

Die beiden gegebenen Funktionen B und ϑ müssen daher, falls die Verbiegung möglich sein soll, der Gleichung (10) genügen. Aus der ersten Gleichung § 15, (2) endlich folgt [vgl. (3)]

$$(11) \quad \psi = \int \frac{\sqrt{A - \vartheta'^2}}{\sin \vartheta} dv,$$

wodurch ψ als Funktion von v bestimmt ist. Die Gleichungen der verbogenen Fläche lauten nunmehr

$$(12) \quad x = u \sin \vartheta \cos \psi, \quad y = u \sin \vartheta \sin \psi, \quad z = v + u \cos \vartheta,$$

wo ψ als Funktion von v aus (11) zu entnehmen ist.

Ist daher die Bedingung (10) erfüllt, so ist die Verbiegung stets möglich. Die geometrische Bedeutung dieser Bedingung ergibt sich leicht wie folgt. Man differenziere die dritte Gleichung § 15, (2) und beachte (10), so folgt

$$(13) \quad lx_1'' + my_1'' + nz_1'' = 0,$$

wo jetzt x_1, y_1, z_1 die Koordinaten der nicht verbogenen Direktrix sein mögen. Da nun nach Rk. u. Fl. I. § 4, (5) x_1'', y_1'', z_1'' mit den Richtungskosinus der Hauptnormalen der Direktrix proportional sind, so drückt (13) aus, daß diese Hauptnormale senkrecht auf der Erzeugenden und damit senkrecht auf der Fläche steht. Die nicht verbogene Direktrix muß also nach I. § 25, S. 133 geodätische Linie der Fläche sein, was auch geometrisch vorauszusehen war.

5. Dreifach orthogonale Flächensysteme.

§ 17. Definition der dreifach orthogonalen Flächensysteme.

Für viele Untersuchungen in der Mathematik ist es nützlich, die Lage eines Raumpunktes statt durch die gewöhnlichen Cartesischen Koordinaten dadurch zu bestimmen, daß man den Punkt als Schnittpunkt von drei Flächen betrachtet. Darauf beruht z. B. die Lagebestimmung eines Punktes P auf einer Kugel durch geographische Breite und Länge und seine Entfernung vom Ursprung des Koordinatensystems; denn alle Punkte mit

gleicher geographischer Breite liegen auf einem Kegel, alle Punkte mit gleicher geographischer Länge auf einer Ebene und alle Punkte, die gleich weit vom Ursprung entfernt sind, auf einer Kugel; der Punkt P erscheint so als Schnittpunkt eines Kegels, einer Ebene und einer Kugel. Diese Flächen stehen gegenseitig aufeinander senkrecht. Konstruiert man nun für alle Raumpunkte den Kegel, die Ebene und die Kugel, so erhält man drei einfach unendliche Flächenscharen, wobei sich stets zwei Flächen rechtwinklig schneiden. Ein solches System von Flächen nennt man ein dreifach orthogonales Flächensystem. In Rk. u. Fl. I. § 23, S. 127 hat sich ergeben, daß die konfokalen Flächen zweiter Ordnung ebenfalls ein dreifach orthogonales Flächensystem bilden.

Analytisch sind drei Scharen von Flächen dadurch definiert, daß man die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Raumpunktes als Funktionen von drei Parametern u, v, w ausdrückt in der Form

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= f(u, v, w), \\ y &= \varphi(u, v, w), \\ z &= \psi(u, v, w). \end{aligned}$$

Denn ist in (1) w konstant und ändern sich u, v , so stellt (1) eine bestimmte Fläche dar. Läßt man w sich ändern, so erhält man eine ganze Schar von Flächen. Das Entsprechende gilt von den Parametern u, v . Die Gleichungen (1) stellen daher drei Scharen von Flächen dar. Gibt man in (1) zwei Parametern, etwa u und w , konstante Werte, z. B. u_0, w_0 , so stellt (1) eine Raumkurve dar — die Schnittlinie der beiden Flächen $u = u_0, w = w_0$.

Beispiel. Bedeutet u die geographische Breite, v die geographische Länge, w den Abstand eines Raumpunktes vom Ursprung, so ist

$$(2) \quad x = w \cos u \cos v, \quad y = w \cos u \sin v, \quad z = w \sin u.$$

Die Flächen $u = \text{konst.}$ sind die Kegel, die Flächen $v = \text{konst.}$ die Ebenen, die Flächen $w = \text{konst.}$ die Kugeln.

Welches ist nun die Bedingung dafür, daß die Flächen des Systems (1) ein dreifach orthogonales System bilden? Die drei durch den Punkt (u, v, w) gehenden

Flächen schneiden sich in drei Raumkurven, die durch diesen Punkt hindurchgehen. Diese müssen aufeinander senkrecht stehen. Von den drei Raumkurven ist aber die erste definiert durch $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$, die zweite durch $v = \text{konst.}$, $w = \text{konst.}$, die dritte durch $w = \text{konst.}$, $u = \text{konst.}$ und die Richtungskosinus der Tangenten dieser drei Kurven im Punkte (u, v, w) sind nach I. § 2, (5) proportional mit

$$\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w} \text{ bzw. mit } \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \text{ bzw. mit } \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Die Bedingung dafür, daß diese drei Tangenten aufeinander senkrecht stehen, ist also, daß für alle Werte von u, v, w

$$(3) \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial u} = 0$$

ist, wo in den Summen hier und später immer nur das auf x bezügliche Glied angegeben ist.

Satz. Die Gleichungen (3) sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Gleichungen (1) ein dreifach orthogonales Flächensystem darstellen.

§ 18. Die Fundamentalgrößen eines dreifach orthogonalen Flächensystems. Gleichungen von Lamé.

Lamé¹⁾ hat für ein dreifach orthogonales System wichtige Gleichungen aufgestellt. Wir erhalten diese auf die einfachste Art, wenn wir die sechs Fundamentalgrößen E, F, G, D, D', D'' für die einzelnen Flächen des Systems berechnen. Die Gauß-Mainardischen Gleichungen [Rk. u. Fl. II. § 17, (1)–(3)] geben dann sofort die Laméschen Gleichungen.

Wir bezeichnen im folgenden alle auf die Flächen $u = \text{konst.}$ bezüglichen Größen mit dem Index u und entsprechend für v und w . Es wird sich zeigen, daß sämtliche Fundamentalgrößen sich durch folgende drei Größen und ihre Differentialquotienten ausdrücken lassen:

¹⁾ Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes. Paris 1859.

$$(1) \quad H_1^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, \quad H_2^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2, \quad H_3^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2.$$

Das Linienelement zwischen den zwei Punkten (u, v, w) und $(u + du, v + dv, w + dw)$ ergibt sich nun durch

$$ds^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \right)^2$$

oder wegen (1) und § 17, (3) in der Form

$$(2) \quad ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2.$$

Aus (2) erhält man nun für die Fundamentalgrößen E_u, F_u, G_u der Fläche $u = \text{konst.}$ bezüglich $H_2^2, 0, H_3^2$ und $\Delta_u = \sqrt{E_u G_u - F_u^2} = H_2 H_3$. Wir haben daher

$$(3) \quad \begin{aligned} E_u &= H_2^2, & F_u &= 0, & G_u &= H_3^2, & \Delta_u &= H_2 H_3, \\ E_v &= H_3^2, & F_v &= 0, & G_v &= H_1^2, & \Delta_v &= H_3 H_1, \\ E_w &= H_1^2, & F_w &= 0, & G_w &= H_2^2, & \Delta_w &= H_1 H_2. \end{aligned}$$

Zur Ableitung der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung stellen wir zuvor gewisse Relationen auf. Differenziert man § 17, (3) der Reihe nach partiell nach w, u, v , so folgt

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} + \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} &= 0, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} + \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= 0, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial w \partial v} &= 0. \end{aligned}$$

Zieht man von der halben Summe dieser Gleichungen jede einzelne ab, so ergibt sich

$$(4) \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0.$$

Differenziert man weiter die zweite und dritte Gleichung von (1) nach u , so folgt mit Beachtung von § 17, (3)

$$(5) \quad \begin{aligned} \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= - \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = H_2 \frac{\partial H_2}{\partial u}, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial w} &= - \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} = H_3 \frac{\partial H_3}{\partial u}. \end{aligned}$$

Für die Richtungskosinus a_u, b_u, c_u der Flächennormalen der Fläche $u = \text{konst.}$ hat man $a_u : b_u : c_u = \frac{\partial x}{\partial u} : \frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial z}{\partial u}$ und analog für die Flächen $v = \text{konst.}$, $w = \text{konst.}$

Aus (1) folgt nun

$$(6) \quad \begin{aligned} a_u &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial x}{\partial u}, & b_u &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial y}{\partial u}, & c_u &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial z}{\partial u}, \\ a_v &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial x}{\partial v}, & b_v &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial y}{\partial v}, & c_v &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ a_w &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial x}{\partial w}, & b_w &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial y}{\partial w}, & c_w &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial z}{\partial w}. \end{aligned}$$

Beachtet man nun, daß für die Fläche $u = \text{konst.}$ v und w die Parameter sind, so erhält man nach I. § 2, (13) und (4)–(5) für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} D_u &= \sum a_u \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{1}{H_1} \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = - \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u}, \\ D'_u &= \sum a_u \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = \frac{1}{H_1} \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = 0, \\ D''_u &= \sum a_u \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} = \frac{1}{H_1} \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} = - \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial u}. \end{aligned}$$

Durch zyklische Vertauschung erhält man hieraus

$$(7) \quad \begin{aligned} D_u &= - \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u}, & D'_u &= 0, & D''_u &= - \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial u}, \\ D_v &= - \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial v}, & D'_v &= 0, & D''_v &= - \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v}, \\ D_w &= - \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w}, & D'_w &= 0, & D''_w &= - \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w}. \end{aligned}$$

Da nun für die Fläche $u = \text{konst.}$ $F_u = 0$, $D'_u = 0$ ist, so folgt aus II. § 3, Satz 3, daß die Parameter v, w für diese Fläche die Parameter der Krümmungslinien sind. Analoges gilt für die andern Flächen. Dies ist der schon in I. § 24, S. 131 bewiesene

Satz von Dupin.¹⁾ Die Flächen eines dreifach orthogonalen Flächensystems schneiden sich nach Krümmungslinien.

Für die Hauptkrümmungsradien der Fläche $w = \text{konst.}$, die wir mit R_{31} und R_{32} bezeichnen, erhält man nach II. § 3, (20)

$$(8) \quad \frac{1}{R_{31}} = -\frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial w}, \quad \frac{1}{R_{32}} = -\frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial w};$$

dabei ist R_{31} der Hauptkrümmungsradius für die Krümmungslinie $v = \text{konst.}$, R_{32} der für die Krümmungslinie $u = \text{konst.}$ Durch zyklische Vertauschung erhält man aus (8) die analogen Größen für die andern Flächen.

Wir wenden nunmehr die Mainardischen Gleichungen II. § 18, (15) auf die Flächen $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$, $w = \text{konst.}$ an. Die sechs Gleichungen reduzieren sich auf die drei folgenden

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial v \partial w} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial w} \frac{\partial H_1}{\partial v} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial v} \frac{\partial H_1}{\partial w}, \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial w \partial u} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial w} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial H_2}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_3}{\partial u} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_3}{\partial v}. \end{aligned}$$

Endlich gibt die Gaußsche Gleichung II. § 18, (16) für die Flächen des orthogonalen Systems

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w} \right) + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_3}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial u} \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_3}{\partial v} \frac{\partial H_1}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} \right) + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial H_2}{\partial w} &= 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Dupin, „Développements de géométrie.“ S. 239. (1813).

Die Gleichungen (9) und (10) sind die Laméschen¹⁾ Gleichungen. Ihnen müssen die drei Funktionen H_1, H_2, H_3 genügen. Sie sind von fundamentaler Bedeutung für die Lösung der Aufgabe, das allgemeinste dreifach orthogonale Flächensystem zu finden. Man hat zu diesem Zweck zunächst die Gleichungen (9) und (10) zu integrieren und so die Funktionen H_1, H_2, H_3 zu bestimmen. Bildet man nunmehr die Gleichungen II. § 17. (8) und (8a) für die Flächen $u = \text{konst.}, v = \text{konst.}, w = \text{konst.}$, so erhält man mit Beachtung von (6)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a_u}{\partial u} &= -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} a_v - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} a_w, \\
 \frac{\partial a_v}{\partial u} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} a_u, \\
 \frac{\partial a_w}{\partial u} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} a_u, \\
 \frac{\partial a_u}{\partial v} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} a_v, \\
 (11) \quad \frac{\partial a_v}{\partial v} &= -\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w} a_w - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} a_u, \\
 \frac{\partial a_w}{\partial v} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w} a_v, \\
 \frac{\partial a_u}{\partial w} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial u} a_w, \\
 \frac{\partial a_v}{\partial w} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial v} a_w, \\
 \frac{\partial a_w}{\partial w} &= -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial u} a_u - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial v} a_v.
 \end{aligned}$$

Dieselben Gleichungen gelten für b_u, b_v, b_w und c_u, c_v, c_w . Das System (11) ist integrabel, da (9) und (10) die Integrabilitätsbedingungen hierfür sind (vgl. II. § 17). Kennt man a_u, a_v, a_w als Integrale von (11), so ist, da nach (6)

¹⁾ Lamé, p. 76ff. a. a. O.

$$a_u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad a_v = \frac{1}{H_2} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad a_w = \frac{1}{H_3} \frac{\partial x}{\partial w} \text{ ist,}$$

$$(12) \quad x = \int (a_u H_1 du + a_v H_2 dv + a_w H_3 dw).$$

Auf analoge Weise erhält man y und z als Funktionen von u, v, w und damit das allgemeinste dreifach orthogonale System.

Anmerkung. Nach dem Satz von Bonnet, II. § 17, entspricht jedem Tripel von Funktionen H_1, H_2, H_3 , die den Gleichungen (9) und (10) genügen, nur ein einziges orthogonales Flächensystem.

§ 19. Die Abbildung durch reziproke Radien-Vektoren (Inversion). Konforme Abbildung des Raumes auf sich selbst.

In Rk. u. Fl. II. § 9, S. 84 hat sich ergeben, daß durch die Inversion die Ebene auf sich selbst konform abgebildet wird. Übertragen wir die Beziehung, die sich zwischen zwei Punkten in der Ebene ergeben hat, auf den Raum, so erhalten wir die Inversion für den Raum. Wir werden dabei finden, daß dadurch der Raum ebenfalls konform auf sich selbst abgebildet wird und daß daher aus einem dreifach orthogonalen Flächensystem durch Inversion wieder ein solches hervorgeht.

Wir ordnen also jedem Raumpunkt P , der vom Ursprung O die Entfernung r hat, einen andern Punkt P' auf OP dadurch zu, daß sein Abstand r' vom Ursprung mit dem Abstand r durch die Gleichung

$$(1) \quad r' = \frac{c^2}{r}$$

verbunden ist, wo c eine konstante Größe bedeutet. O heißt auch hier das Zentrum der Inversion. Alle Punkte der Kugel mit dem Radius $= c$ um O als Zentrum fallen mit ihren entsprechenden zusammen und alle Punkte innerhalb dieser Kugel haben ihre Bilder außerhalb derselben und umgekehrt. Das Zentrum der Inversion ist ein singulärer Punkt: ihm entsprechen alle unendlich fernen Punkte.

Sind nun x, y, z die Koordinaten von P und u, v, w die Koordinaten seines entsprechenden P' , der Ursprung das Zentrum der Inversion, so findet man ohne Mühe

$$(2) \quad x = \frac{c^2 u}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad y = \frac{c^2 v}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad z = \frac{c^2 w}{u^2 + v^2 + w^2},$$

oder nach u, v, w aufgelöst

$$(2a) \quad u = \frac{c^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \frac{c^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad w = \frac{c^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Durch (2) ist jedem Koordinatentripel (x, y, z) ein solches in (u, v, w) zugeordnet. Einer Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

entspricht die Kugel

$$c^2 (Au + Bv + Cw) + D (u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Ist aber $D = 0$, geht also die Ebene durch das Inversionszentrum, so entspricht sie sich selbst. Der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

entspricht die Kugel (bzw. Ebene, wenn $D = 0$)

$$c^4 + c^2 (Au + Bv + Cw) + D (u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Einer geraden Linie als Schnitt von zwei Ebenen entspricht ein Kreis als Schnitt der entsprechenden Kugeln, einem Kreis wieder ein Kreis. Nur einer Geraden (oder einem Kreis), die durch das Inversionszentrum geht, entspricht wieder eine Gerade.

Wir beweisen nunmehr den

Satz 1. Die einzigen konformen Abbildungen des Raumes auf sich selbst sind die Inversion und die Ähnlichkeit.

Dabei verstehen wir wie in II. § 10 unter konformer Abbildung eine solche, durch welche ein unendlich kleines Dreieck PQR in ein ihm ähnliches übergeführt wird. Wir wenden zum Beweise dieses Satzes die Ergebnisse des letzten Paragraphen an.

Sind wie oben u, v, w die Koordinaten eines Raumpunktes und x, y, z die des entsprechenden, so muß einem Linienelement, das durch (u, v, w) geht, ein Linienelement durch (x, y, z) entsprechen; diese Linienelemente aber müssen wegen der Konformität der Ab-

bildung einander proportional sein (vgl. II. § 10). Es muß also sein

$$(3) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda^{-2} (du^2 + dv^2 + dw^2);$$

den Proportionalitätsfaktor, der eine Funktion von u, v, w ist, haben wir gleich λ^{-2} gesetzt; es zeigt sich, daß bei dieser Annahme die folgende Rechnung sich am einfachsten gestaltet. Nun sind x, y, z als Funktionen von u, v, w so zu bestimmen, daß diese in die linke Seite von (3) eingeführt, die rechte Seite ergeben. Da nun die Koeffizienten von $du dv, dv dw, dw du$ gleich Null sind, d. h.

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} = \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial u} = 0$$

ist, so folgt nach § 17, (3), daß x, y, z als Funktionen von u, v, w betrachtet ein dreifach orthogonales Flächensystem bilden. Vergleicht man (3) mit § 18, (2), so hat man

$$(4) \quad H_1 = H_2 = H_3 = \lambda^{-1}.$$

Es ist nun λ in (4) als Funktion von u, v, w so zu bestimmen, daß H_1, H_2, H_3 den Laméschen Gleichungen § 18, (9), (10) genügen. Aus § 18, (9) folgt so

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v \partial w} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial w \partial u} = 0,$$

aus § 18, (10)

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} \\ &= \lambda^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial w} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (5) geben

$$(7) \quad \lambda = U + V + W,$$

wo U Funktion von u , V von v , W von w allein ist. Bezeichnet man Ableitungen mit Strichen, so folgt aus (6) $U'' = V'' = W''$ und weil u, v, w unabhängige Variable sind

$$(8) \quad U'' = V'' = W'' = \frac{2}{c^2},$$

wo c eine Konstante ist, die wir zunächst als endlich voraussetzen.

Aus (8) folgen als Integrale

$$U = \frac{1}{c^2} \left\{ (u - a_1)^2 + a_2 \right\}, \quad V = \frac{1}{c^2} \left\{ (u - b_1)^2 + b_2 \right\},$$

$$W = \frac{1}{c^2} \left\{ (w - c_1)^2 + c_2 \right\},$$

wo die a, b, c Integrationskonstanten sind.

Führt man diese Funktionen in (7) und (6) ein, so ergibt sich $a_2 + b_2 + c_2 = 0$. Man kann ferner unbeschadet der Allgemeinheit statt $u - a_1, v - b_1, w - c_1$ bezüglich u, v, w setzen, da dies nur einer Koordinatenverschiebung gleichkommt. Man erhält so

$$\lambda = \frac{1}{c^2} (u^2 + v^2 + w^2)$$

und nach (4)

$$(9) \quad H_1 = H_2 = H_3 = c^2 \varrho^{-1},$$

wo abkürzend $\varrho = u^2 + v^2 + w^2$ gesetzt ist. Nachdem jetzt die Funktionen H_1, H_2, H_3 ermittelt sind, hat man die Gleichungen § 18, (11) zu integrieren; man erhält

$$a_u = 1 - 2\varrho^{-1}u^2, \quad a_v = -2\varrho^{-1}uv, \quad a_w = -2\varrho^{-1}uw$$

und endlich aus § 18, (12)

$$(10) \quad x = \frac{c^2 u}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad y = \frac{c^2 v}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad z = \frac{c^2 w}{u^2 + v^2 + w^2},$$

wobei die zwei letzten Gleichungen ähnlich erhalten werden wie die erste. Die Integrationskonstanten sind gleich Null gesetzt worden, was einer Parallelverschiebung des xyz -Koordinatensystems entspricht. Die Gleichungen (10) stimmen mit (2) überein und definieren daher eine Inversion; sie sind zugleich die Gleichungen eines dreifach orthogonalen Systems von Kugeln ($x = \text{konst.}, y = \text{konst.}, z = \text{konst.}$).

Es bleibt noch der Fall zu erledigen, wo c^2 in (8) $= \infty$ ist. In diesem Falle sind U, V, W lineare Funktionen;

aus (6) folgt aber $\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \lambda}{\partial w} = 0$ und daraus $\lambda =$ einer Konstanten. H_1, H_2, H_3 sind nach (4) ebenfalls konstant $= m$ und auch für die Richtungskosinus $a_u, a_v, a_w; b_u, b_v, b_w; c_u, c_v, c_w$ erhält man aus § 18, (11) konstante Werte. Da aber diese drei aufeinander senkrechte Gerade bestimmen, so sieht man, daß sie die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ sein müssen. Aus § 18, (12) folgt so

$$(11) \quad \begin{aligned} x - x_0 &= (\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w) m, \\ y - y_0 &= (\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w) m, \\ z - z_0 &= (\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w) m. \end{aligned}$$

Verschiebt man noch das xyz -Koordinatensystem so, daß sein Ursprung in den Punkt x_0, y_0, z_0 gelangt, und dreht man das u, v, w Koordinatensystem, indem man setzt

$$\begin{aligned} \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w &= u', & \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w &= v', \\ \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w &= w', \end{aligned}$$

so folgt

$$(12) \quad x = mu', \quad y = mv', \quad z = mw'.$$

Durch diese Gleichungen und somit auch durch (11) ist aber der Raum auf sich selbst ähnlich bezogen. Damit ist der Beweis des Satzes 1 erledigt.

Die Inversion erlaubt nun, aus dreifach orthogonalen Flächensystemen andere derartige herzuleiten, da bei der Inversion die Winkel erhalten bleiben, also speziell rechte Winkel auch nach der Inversion rechte Winkel bleiben. Unterwirft man daher ein dreifach orthogonales System einer Inversion, so erhält man wieder ein dreifach orthogonales System. So bilden beispielsweise (vgl. II. § 5, S. 40) die abwickelbaren Flächen der Normalen einer Fläche S längs ihrer Krümmungslinien mit den Parallelfächen zu S ein dreifach orthogonales Flächensystem. Durch Inversion erhält man hieraus ein neues dreifach orthogonales System. S transformiert sich in S' und die Transformierten der abwickelbaren Flächen schneiden daher aus S' nach dem Satz von Dupin § 18 die Krümmungslinien aus. Die Krümmungslinien von S gehen daher in die Krümmungslinien von S' über.

Satz 2. Kennt man auf einer Fläche S die Krümmungslinien, so erhält man durch eine Inversion eine neue Fläche S' , auf der man ebenfalls die Krümmungslinien kennt.

§ 20. Die Cykliden.

Wir wenden das am Schluß von § 19 Gesagte auf das dreifach orthogonale System von Kegeln, Kugeln und Ebenen in § 17, (2) an. Durch Inversion an einem beliebigen Inversionszentrum erhält man aus dem System der Kugeln und Ebenen zwei Kugelsysteme (§ 19). Um das Bild des Kegelsystems zu erhalten, legen wir an einen der Kegel drei Tangentialebenen und betrachten den Kegel als die Enveloppe aller Kugeln, die jene drei Ebenen berühren. Durch Inversion verwandeln sich diese drei Berührungsebenen in drei Kugeln, und die Kugeln, deren Enveloppe der Kegel ist, geben Kugeln, die stets jene drei Kugeln berühren: die Enveloppe dieser Kugeln ist das Bild des Kegels. Die Fläche nun, die von einem System von Kugeln, die stets drei feste Kugeln berühren, eingehüllt wird, heißt nach Dupin¹⁾ eine Cyklide.²⁾ Wir haben daher den

Satz 1. Ein dreifach orthogonales System von Kugeln, Ebenen und Kegeln geht durch Inversion in zwei Kugelsysteme und ein System von Cykliden über.

Die Kugelsysteme schneiden aus den Cykliden nach dem Satz von Dupin die Krümmungslinien aus; diese bestehen aber aus lauter Kreisen, da sie die Bilder der Krümmungslinien der Kegel, also die Bilder von Geraden und Kreisen sind.

¹⁾ Dupin, Applications de géométrie et de mécanique à la marine et aux ponts et chaussées. Paris 1822. S. 200ff.

²⁾ Man kann zeigen, daß die Fläche, welche die Enveloppe von allen drei feste Kugeln berührenden Kugeln ist, noch durch eine zweite Reihe von Kugeln eingehüllt wird und daß die Zentren der beiden Reihen von Kugeln auf zwei Fokalkegelschnitten liegen. Wir führen dies ohne Beweis hier an, um zu zeigen, daß die hier gegebene Definition der Cykliden auf keine anderen Flächen führt als auf die in Rk. u. Fl. II. § 5, S. 45 mit demselben Namen bezeichneten. Vgl. den Schluß dieses Paragraphen.

Zur analytischen Darstellung des transformierten Systems nehmen wir eine spezielle Lage des Systems der Kugeln, Ebenen und Kegel gegen das Inversionszentrum an. Das Inversionszentrum möge der Ursprung des Koordinatensystems sein, während die gemeinsame Spitze der Kegel im Punkt A der x -Achse im Abstand a vom Ursprung liegen und die gemeinsame Achse der Kegel mit der z -Achse parallel sein möge. Nach § 17, (2) haben wir dann für das dreifach orthogonale System der Kugeln, Ebenen und Kegel

$$(1) \quad x = a + w \cos u \cos v, \quad y = w \cos u \sin v, \quad z = w \sin u.$$

Wird durch die Inversion der Raumpunkt (x, y, z) in den Punkt (x_1, y_1, z_1) übergeführt, so hat man nach § 19, (2), wenn $c = 1$ gesetzt wird,

$$x_1 = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y_1 = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z_1 = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Als Gleichungen des dreifach orthogonalen transformierten Systems erhält man so

$$\begin{aligned} x_1 &= (a + w \cos u \cos v) : (a^2 + 2aw \cos u \cos v + w^2), \\ (2) \quad y_1 &= w \cos u \sin v : (a^2 + 2aw \cos u \cos v + w^2), \\ z_1 &= w \sin u : (a^2 + 2aw \cos u \cos v + w^2). \end{aligned}$$

Die Cykliden sind hier die Flächen $u = \text{konst.}$

Um einen Überblick über die Gestalt einer einzelnen Cyklide (s. Fig. 6) zu erhalten, suchen wir die Bilder der Mantellinien des Kegels, aus dem die Cyklide durch Inversion hervorgegangen ist: Die Bilder der Mantellinien sind Kreise, welche alle durch den Ursprung und den Punkt

$x = \frac{1}{a}$ der x -Achse hindurchgehen; denn der Ursprung ist

das Bild aller unendlich fernen Punkte der Mantellinien, der Punkt $x = \frac{1}{a}$ das Bild der Kegelspitze. Diese beiden

Punkte sind daher für die Cyklide Knotenpunkte, d. h. die sämtlichen Tangenten an die Cyklide in einem dieser Punkte bilden nicht eine Ebene (Tangentenebene), sondern einen Kegel, der wegen der Konformität der Abbildung mit dem Kegel, der die Cyklide ergeben hat, kongruent

ist (und parallel). Verschiebt man daher den Kegel parallel mit sich, so daß die Kegelspitze in den Punkt $x = \frac{1}{a}$ der x -Achse fällt, und zeichnet alle Kreise, welche die Mantellinien dieses Kegels in der Kegelspitze berühren

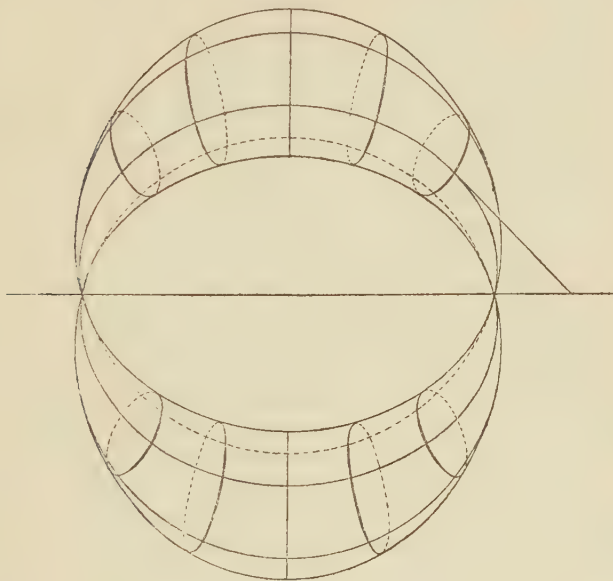


Fig. 6.

und außerdem durch den Ursprung gehen, so erzeugen eben diese Kreise die Cyklide. Daraus folgt, daß jede Ebene durch die x -Achse die Cyklide in zwei Kreisen schneidet; dreht man den einen um die x -Achse um 180° , so fällt er mit dem andern zusammen.

Diese Kreise stellen die erste Schar der Krümmungslinien der Cyklide dar — sie werden aus der Cyklide durch die eine Kugelschar, das Bild der Ebenenschar, ausgeschnitten. Da alle diese Ebenen durch die Kegelachse gehen, so gehen alle Kugeln dieser Schar durch das Bild der Kegelachse, d. h. den Kreis, der über dem Abstand der Knotenpunkte als Durchmesser in der

xz -Ebene beschrieben wird. Diese Kugelschar schneidet die Cyklide überall orthogonal.

Die zweite Schar von Krümmungslinien — ebenfalls Kreise — wird aus der Cyklide durch die zweite Schar von Kugeln, die Bilder der konzentrischen Kugeln, ausgeschnitten. Die Mittelpunkte dieser Kugeln liegen alle auf der x -Achse. Da die zweite Kugelschar die erste Kreisschar allenthalben orthogonal schneidet, so erhält man die zweite Kreisschar am einfachsten auf folgende Weise: Man nehme auf der x -Achse einen beliebigen Punkt P außerhalb der Knotenpunkte an und ziehe an sämtliche Kreise der ersten Schar die Tangenten; der Ort der Berührungspunkte gibt zwei Kreise der zweiten Schar.

Wir bemerken noch, daß durch jeden Kreis der ersten Schar eine Kugel geht, welche die Cyklide längs jenes Kreises berührt: es ist die Transformierte der Tangentialebene des Kegels, deren Berührungsmantellinie jenem Kreis entspricht. Ebenso geht durch jeden Kreis der zweiten Schar eine Kugel, welche die Cyklide längs dieses Kreises berührt: diese Kugeln sind die Bilder der Kugeln, welche den Kegel oder drei Tangentialebenen desselben berühren. Man zeigt unschwer, daß die Mittelpunkte der ersten Kugelschar auf einer Hyperbel, die Mittelpunkte der zuletzt genannten Kugelschar auf einer Ellipse liegen. Diese beiden Kegelschnitte sind die in der Fußnote S. 87 erwähnten Fokalkegelschnitte [vgl. auch II. § 5]. Endlich geht aus dem Gesagten hervor, daß die xz - und die xy -Ebene sowie die Ebene senkrecht zur x -Achse durch die Mitte der Knotenpunkte für die Cyklide Symmetrieebenen sind.

6. Strahlensysteme.

§ 21. Definition. Formeln für Strahlensysteme.

Mit der Theorie der Oberflächen ist eng verknüpft die Geometrie der Strahlensysteme¹⁾.

Unter einem Strahlensystem oder einer Strahlenkongruenz versteht man die Gesamtheit von ∞^2 Strahlen

¹⁾ Die ersten Untersuchungen über Strahlensysteme verdankt man Malus, [Optique, Journ. de l'Ec. polyt. T. VII (cah. 14) 1808,

im Raume, die so verteilt sind, daß durch jeden Raumpunkt ein Strahl (oder eine endliche Zahl von solchen) mit einer bestimmten von Punkt zu Punkt stetig variierenden Richtung hindurchgeht.

Um ein Strahlensystem analytisch darzustellen, schneiden wir dieses durch eine beliebige Fläche, die alle Strahlen treffen möge; diese heiße die Leitfläche des Systems. Die Gleichungen der Leitfläche schreiben wir in der üblichen Weise mit Hilfe der Parameter u und v in der Form

$$\begin{aligned}x &= f(u, v), & y &= \varphi(u, v), \\z &= \psi(u, v).\end{aligned}$$

Die Richtungskosinus des Strahles (oder eines der Strahlen), der durch den Punkt (u, v) der Leitfläche geht, mögen X, Y, Z sein (s. Fig. 7). Sind diese als Funktionen von u, v gegeben, so ist dadurch jedem Punkt der Leit-

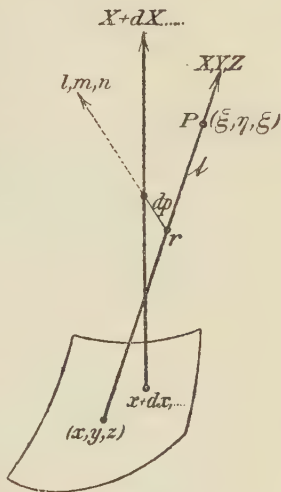


Fig. 7.

fläche ein Strahl (oder mehrere, falls X, Y, Z mehrdeutige Funktionen von u, v sind) zugewiesen. Sind ξ, η, ζ die Koordinaten eines Punktes P auf dem durch den Punkt (u, v) der Leitfläche hindurch gehenden Strahle, t die Entfernung (Abszisse) des Punktes P vom Punkt (u, v) der Leitfläche, so ist

S. 1—44 und 84—129] und Hamilton, (Transact. of the R. Irish Ac. vol. XV, 1828 und vol. XVI. 1830), die aus optischem Interesse zu ihnen geführt wurden. Die ziemlich in Vergessenheit geratenen Resultate von Malus und Hamilton wurden dann später von Kummer in seiner wichtigen Arbeit „Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme“ (J. f. Math. Bd. 57, S. 189ff.) neu bewiesen, und vervollständigt. Die folgende Darstellung lehnt sich in den wesentlichen Punkten an die Kummersche Arbeit an. Man vgl. auch Zindler „Die Entwicklung und der gegenwärtige Stand der differentiellen Liniengeometrie (Bericht, Jahresber. d. deutsch. Math. Verein. Bd. 15, 1906, S. 185ff.).

$$(1) \quad \xi = x + tX, \quad \eta = y + tY, \quad \zeta = z + tZ, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Dies sind die Gleichungen des Strahlensystems. Variiert in (1) t allein, so durchläuft der Punkt (ξ, η, ζ) einen Strahl. Eine Gleichung von der Form

$$(2) \quad \Phi(u, v) = 0$$

greift aus den ∞^2 Strahlen ∞^1 Strahlen heraus: es sind die Strahlen längs der auf der Leitfläche liegenden Kurve $\Phi(u, v) = 0$. Die Gleichungen (1) definieren daher in Verbindung mit (2) eine Regelfläche.

Ziehen wir durch den Ursprung des Koordinatensystems die Parallelen zu den Systemstrahlen und schneiden die Parallelen mit der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

so entspricht jedem Strahl ein Punkt der Kugel, den wir das sphärische Bild des Strahles nennen. Die Koordinaten des sphärischen Bildes eines Strahles sind daher X, Y, Z .

Betrachten wir einen dem Strahl (1) unendlich benachbarten Strahl mit den Gleichungen

$$(3) \quad \xi_1 = x + dx + t_1(X + dX), \quad \eta_1 = y + dy + t_1(Y + dY), \\ \zeta_1 = z + dz + t_1(Z + dZ),$$

wo $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$ usw. und wegen $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$

$$(4) \quad XdX + YdY + ZdZ = 0$$

ist, so sind von besonderer Wichtigkeit:

1. Der kürzeste Abstand dp der beiden Strahlen,
2. die Richtungskosinus l, m, n dieses Abstandes,

3. der Wert r der Abszisse t im Fußpunkt von dp auf dem Strahle (1).

Diese Werte drücken sich aus durch die gegebenen Größen x, y, z, X, Y, Z und ihre Ableitungen nach u, v . Es treten dabei gewisse Verbindungen dieser Ableitungen auf, für die wir folgende Abkürzungen einführen:

$$\begin{aligned}
 \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 &= E_0, \quad \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = F_0, \quad \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 = G_0, \\
 (5) \quad & - \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = D, \quad - \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = D', \\
 & - \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = D'_1, \quad - \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = D''.
 \end{aligned}$$

Diese Größen mögen die „Fundamentalgrößen“ Kummers heißen. Bezeichnet man mit ds_0 das Linienelement des sphärischen Bildes des Strahlensystems, wobei ds_0 auch den unendlich kleinen Winkel der beiden Nachbarstrahlen bedeutet, so ist

$$(6) \quad ds_0^2 = \sum dX^2 = E_0 du^2 + 2F_0 du dv + G_0 dv^2;$$

weiter ist

$$(7) \quad - \sum dX dx = D du^2 + (D' + D'_1) du dv + D'' dv^2.$$

Wir bemerken sofort die Ähnlichkeit der obigen Ausdrücke mit den Fundamentalgrößen der Flächentheorie. In der Tat bilden ja die Normalen einer Fläche, z. B. der Leitfläche selbst ein Strahlensystem, das wir ein Normalensystem nennen. Für dieses bedeuten dann X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormalen, die wir früher mit a, b, c bezeichnet haben oder die Koordinaten des sphärischen Bildes der Leitfläche. E_0, F_0, G_0 sind die Fundamentalgrößen erster Ordnung für das sphärische Bild der Leitfläche, die wir in Rk. u. Fl. II. § 4 mit denselben Buchstaben bezeichnet haben. D, D', D'_1, D'' bedeuten die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Leitfläche, wobei noch $D' = D'_1$ wird, vgl. II. § 2, (13). Alle Resultate der allgemeinen Strahlensysteme finden daher Anwendung auf die Flächennormalen der Leitfläche. Für ein allgemeines Strahlensystem wird der Leser die Größen $E_0, F_0, G_0, D, D', D'_1, D''$ nicht mit den Fundamentalgrößen der Leitfläche verwechseln.

Nach dieser Bemerkung berechnen wir die drei Größen, die oben für zwei benachbarte Strahlen aufgeführt sind. Der Abstand p eines beliebigen Punktes (ξ, η, ζ) auf dem

Strahl (1) von einem beliebigen Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) auf dem Strahl (3) ergibt sich aus

$$(8) \quad p^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2.$$

In dieser Gleichung sind t und t_1 so zu wählen, daß p in (8) ein Minimum wird. Dieser Minimalwert ist dann unendlich klein und werde, wie oben, mit dp bezeichnet. Die partielle Ableitung der rechten Seite von (8) nach t und t_1 muß für den Fall des Minimums verschwinden, d. h. es ist

$$(9) \quad \begin{aligned} (\xi_1 - \xi) X + (\eta_1 - \eta) Y + (\zeta_1 - \zeta) Z &= 0, \\ (\xi_1 - \xi) dX + (\eta_1 - \eta) dY + (\zeta_1 - \zeta) dZ &= 0. \end{aligned}$$

Aus (9) bestimmen wir t und t_1 so, daß wir zugleich auch die Größen l, m, n, r erhalten. Zunächst ist

$$(10) \quad \xi_1 - \xi = l dp, \quad \eta_1 - \eta = m dp, \quad \zeta_1 - \zeta = n dp.$$

Aus (1), (3) und (10) folgt

$$(11) \quad \begin{aligned} dx + X(t_1 - t) + t_1 dX &= l dp, \\ dy + Y(t_1 - t) + t_1 dY &= m dp, \\ dz + Z(t_1 - t) + t_1 dZ &= n dp, \end{aligned}$$

und aus (9) und (10)

$$(12) \quad \begin{aligned} lX + mY + nZ &= 0, \\ l dX + m dY + n dZ &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (12) enthalten den bekannten Satz, daß der kürzeste Abstand dp auf den beiden Strahlen senkrecht steht. Multipliziert man die Gleichungen (11) der Reihe nach mit X, Y, Z und addiert, so folgt nach (1), (4) und (12) $t_1 - t = -\sum X dx$, woraus sich ergibt, daß t_1 und t sich nur um eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung unterscheiden. Wir können also setzen: $t = t_1 = r$. Multipliziert man nunmehr die Gleichungen (11) bezüglich mit dX, dY, dZ und addiert, so folgt nach (1), (4) und (12)

$$(13) \quad r = -\frac{\sum dX dx}{\sum dX^2}.$$

Endlich multipliziere man die Gleichungen (11) der Reihe nach mit l , m , n , und addiere sie; es folgt so

$$(14) \quad dp = ldx + mdy + ndz;$$

hierbei sind die Richtungskosinus l , m , n aus (12) und

$$(15) \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

zu bestimmen und in (14) einzutragen. Nach I. Einl. (17) erhält man aus (12), wenn ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist

$$(16) \quad \varrho l = YdZ - ZdY, \quad \varrho m = ZdX - XdZ, \quad \varrho n = XdY - YdX.$$

Trägt man die Werte von l , m , n in (15) ein und beachtet I. Einl. (15), so folgt

$$(17) \quad \varrho^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

also nach (16) und (6)

$$(18) \quad \begin{aligned} lds_0 &= YdZ - ZdY, & mds_0 &= ZdX - XdZ, \\ nds_0 &= XdY - YdX. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung lautet ausführlich

$$(19) \quad lds_0 = \left(Y \frac{\partial Z}{\partial u} - Z \frac{\partial Y}{\partial u} \right) du + \left(Y \frac{\partial Z}{\partial v} - Z \frac{\partial Y}{\partial v} \right) dv.$$

Benützt man jetzt die Gleichungen II. § 2, (19) angewendet für die Bildkugel, so erhält man

$$(20) \quad l = \frac{\left(E_0 \frac{\partial X}{\partial v} - F_0 \frac{\partial X}{\partial u} \right) du + \left(F_0 \frac{\partial X}{\partial v} - G_0 \frac{\partial X}{\partial u} \right) dv}{ds_0 \sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}},$$

sowie durch cyklische Vertauschung von X , Y , Z die analogen Gleichungen für m , n . Setzt man diese Werte

in (14) ein, nachdem man dort dx durch $\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$ ersetzt hat, so folgt nach (5)

$$\begin{aligned} dp \cdot ds_0 \sqrt{E_0 G_0 - F_0^2} &= (F_0 D - E_0 D_1') du^2 + (G_0 D' - F_0 D'') dv^2 \\ &+ (G_0 D + F_0 D' - E_0 D'' - F_0 D_1') du dv. \end{aligned}$$

Die rechte Seite läßt sich in die Form einer Determinante bringen und man hat daher für den kürzesten Abstand dp der beiden benachbarten Strahlen

$$(21) \quad dp = \frac{1}{ds_0 \sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}} \begin{vmatrix} Ddu + D'dv & D_1 du + D''dv \\ E_0 du + F_0 dv & F_0 du + G_0 dv \end{vmatrix}.$$

Endlich erhält man für die Abszisse r des kürzesten Abstands auf dem ersten Strahl aus (13), (6) und (7)

$$(22) \quad r = \frac{Ddu^2 + (D' + D_1') du dv + D'' dv^2}{E_0 du^2 + 2F_0 du dv + G_0 dv^2}.$$

§ 22. Anwendung auf Normalensysteme. Malus-Dupinscher Satz.

Wir wenden die Formeln des § 21 zunächst auf das Normalensystem der Leitfläche an. Es ist dann, wie in § 21 bemerkt, $D' = D_1'$. Wir fragen zuerst:

In welchen Richtungen schneiden sich zwei konsekutive Flächennormalen?

In diesem Falle ist in § 21, (21) $dp = 0$. Ersetzt man in der Determinante D_1' durch D' , E_0 , F_0 , G_0 durch die Rk. u. Fl. II. § 4, (6) angegebenen Werte, und zieht die mit h multiplizierte erste Reihe von der zweiten ab, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} Ddu + D'dv & D'du + D''dv \\ E du + F dv & F du + G dv \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist aber nach II. § 3, (11) die Differentialgleichung der Krümmungslinien der Leitfläche. Man erhält so das bekannte Resultat, daß nur in den Hauptkrümmungsrichtungen einer Fläche konsekutive Flächennormalen sich schneiden.

Wir untersuchen ferner die Bedeutung von r für ein Normalensystem. Aus § 21, (22) und II. § 4, (6) folgt

$$\frac{1}{r} = h - k \frac{ds^2}{L};$$

h ist dabei die mittlere Krümmung $= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, k das Krümmungsmaß $= \frac{1}{R_1 R_2}$ der Fläche.

Nach I. § 22, (2) ist aber $\frac{ds^2}{L}$ der Krümmungsradius des durch ds gelegten Normalschnitts. Bezeichnen wir diesen mit R , so folgt

$$\frac{1}{r} = h - kR.$$

Aus dieser Gleichung berechnet sich einfach die Abszisse r des kürzesten Abstands für zwei konsekutive Flächennormalen längs einer Richtung, der der Krümmungsradius R des zugehörigen Normalschnitts entspricht. Für $R = R_1$ folgt $r = R_1$, ebenso für $R = R_2$ $r = R_2$, wie zu erwarten war. Für $R = \infty$ folgt $r = 0$, d. h. zieht man in den Endpunkten eines Linienelements einer Asymptotenkurve die Flächennormalen, so ist dieses Linienelement selbst der kürzeste Abstand der beiden Normalen (vgl. I. § 28, Aufg. 15. b).

Wir fragen weiter: Welches ist die Bedingung dafür, daß ein gegebenes Strahlensystem ein Normalensystem bildet?

Wenn das Strahlensystem

$$(1) \quad \xi = x + tX, \quad \eta = y + tY, \quad \zeta = z + tZ$$

die Normalen einer Fläche bildet, so muß sich t als Funktion von u, v so bestimmen lassen, daß die Gleichungen (1) nunmehr eine Fläche darstellen, welche die Systemstrahlen senkrecht schneidet. Da also in diesem Fall X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen jener Fläche sind, so muß

$$(2) \quad X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta = 0$$

sein. Setzt man die aus (1) sich ergebenden Werte für $d\xi, d\eta, d\zeta$ in (2) ein und beachtet, daß $\sum X^2 = 1$, $\sum X dX = 0$ ist, so folgt

$$dt + \sum X dx = 0$$

oder

$$(3) \quad dt = - \left(\sum X \frac{\partial x}{\partial u} \right) du - \left(\sum X \frac{\partial x}{\partial v} \right) dv.$$

Die rechte Seite von (3) muß wie die linke ein totales Differential sein, es muß also

$$(3a) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\sum X \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\sum X \frac{\partial x}{\partial v} \right)$$

sein. Hieraus aber folgt sofort nach § 21, (5)

$$(4) \quad D' = D'_1,$$

also

Satz 1. Die Gleichung (4) ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (1) ein Normalensystem ist.

Ist (4) erfüllt, so ergibt sich t aus (3) in der Form

$$(5) \quad t = - \int \left\{ \left(\sum X \frac{\partial x}{\partial u} \right) du + \left(\sum X \frac{\partial x}{\partial v} \right) dv \right\} + \text{konst.}$$

Führt man diesen Wert von t in (1) ein, so erhält man die Gleichungen der Fläche, deren Normalen das Normalensystem bilden. Wegen der willkürlichen Konstanten in (5) erhält man eine ganze Schar von Flächen, welche das Strahlensystem (1) orthogonal schneiden. Zwei beliebige dieser Orthogonalflächen haben überall denselben Abstand von einander: Die ganze Schar besteht daher aus den Parallellflächen zu irgend einer der Orthogonalflächen.

Die Gleichung (3a) läßt sich auf eine bemerkenswerte Form bringen, wenn man die Winkel φ , ψ einführt, den der Strahl (X, Y, Z) mit den Parameterlinien $v = \text{konst.}$ $u = \text{konst.}$ der Leitfläche bildet. Ist

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2 F_1 du dv + G_1 dv^2$$

das Quadrat des Linienelements der Leitfläche, so ergibt sich nach II. § 1, (19)

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \sum X \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{G_1}} \sum X \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen erhält man nach (3a) als Bedingung dafür, daß das Strahlensystem ein Normalensystem ist

$$(3b) \quad \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{E_1} \cos \varphi) = \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{G_1} \cos \psi),$$

und nach (5)

$$(5a) \quad t = - \int (\sqrt{E_1} \cos \varphi \, du + \sqrt{G_1} \cos \psi \, dv) + \text{konst.}$$

In diesen Gleichungen treten nur die Winkel φ , ψ und die Koeffizienten des Linienelements der Leitfläche auf. Wird nun die Leitfläche ohne Dehnung und Faltung verbogen und bleiben dabei die Strahlen des Systems mit der Fläche fest verbunden, so daß also während der Biegung für jeden Punkt φ und ψ sich nicht ändern, so ist die Gleichung (3b), wenn sie vor der Biegung erfüllt ist, auch nach der Biegung erfüllt, und man hat daher den

Satz von Beltrami:¹⁾ Denkt man sich die Strahlen eines von der Leitfläche ausgehenden Normalensystems von einer Orthogonalfläche begrenzt und mit der Leitfläche fest verbunden, so ist bei jeder Verbiegung der Leitfläche der Ort der Endpunkte der Strahlen des Systems eine zu den Strahlen orthogonale Fläche.

In der geometrischen Optik spielen die Normalensysteme eine ganz besondere Rolle. Beispielsweise bilden alle Lichtstrahlen, die von einem leuchtenden Punkt ausgehen, ein Normalensystem. Erleiden nun diese Strahlen an einer Fläche (Linsenfläche) nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz eine Brechung, so bilden die gebrochenen Strahlen ein Strahlensystem, das wiederum ein Normalensystem ist.

Es gilt nämlich der

Satz 2 (von Malus-Dupin).²⁾ Erleidet ein von Lichtstrahlen gebildetes Normalensystem eine beliebige Anzahl von Reflexionen oder Brechungen, so bleibt es stets ein Normalensystem.

Um diesen für die Optik wichtigen Satz zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß ein Normalensystem nach einer Brechung an einer Fläche — der Leitfläche — wiederum ein Normalensystem ist. Dabei setzen wir natürlich voraus,

¹⁾ Beltrami, Ricerche di analisi applicata, Giorn. di mat. 2 (1864) p. 281.

²⁾ Über die Entdeckung des Malus-Dupinschen Satzes vgl. Darboux, Théorie des surfaces II, S. 280, Note

daß die Leitfläche keine der Orthogonalflächen des Strahlensystems ist. Die Strahlen des Normalensystems (1), für das also (4) gilt, kommen vom ersten Medium, treffen die Leitfläche und gehen dann nach einer Brechung an dieser in das zweite Medium über. Das gebrochene Strahlensystem habe zu Gleichungen

$$(6) \quad \xi_1 = x + t_1 X_1, \quad \eta_1 = y + t_1 Y_1, \quad \zeta_1 = x + t_1 Z_1.$$

Ist nun ε der Winkel, den der Strahl (X, Y, Z) des Systems (1) mit der Flächennormalen (a, b, c) , [deren positive Richtung vom ersten zum zweiten Medium zeige] im Punkt P der Leitfläche bildet und ebenso ε_1 der Winkel, den der gebrochene Strahl (X_1, Y_1, Z_1) mit der Flächennormalen bildet, so muß nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz

$$(7) \quad \sin \varepsilon = n \sin \varepsilon_1$$

sein, wo n der Brechungsindex ist; außerdem müssen der einfallende, der gebrochene Strahl und das Einfallslot in einer Ebene liegen. Analytisch drücken wir die letztere Bedingung aus durch die Gleichungen

$$(8) \quad aw = X + \lambda X_1, \quad bw = Y + \lambda Y_1, \quad cw = Z + \lambda Z_1;$$

denn eliminiert man die willkürlichen Größen w und λ so erhält man eine Determinante, deren Verschwinden eben ausdrückt, daß die drei genannten Richtungen in Einer Ebene liegen. Multipliziert man (8) der Reihe nach zuerst mit a, b, c , dann mit X, Y, Z und addiert, so erhält man, da

$$\sum aX = \cos \varepsilon, \quad \sum aX_1 = \cos \varepsilon_1, \quad \sum XX_1 = \cos(\varepsilon - \varepsilon_1)$$

ist,

$$w = \cos \varepsilon + \lambda \cos \varepsilon_1, \quad w \cos \varepsilon = 1 + \lambda \cos(\varepsilon - \varepsilon_1).$$

Nach (7) erhält man hieraus $\lambda = -n$ und daher nach (8) die Gleichungen

$$(9) \quad aw = X - nX_1, \quad bw = Y - nY_1, \quad cw = Z - nZ_1.$$

Aus der ersten Gleichung erhält man durch Differenzieren

$$(10) \quad w \frac{\partial a}{\partial u} + a \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} - n \frac{\partial X_1}{\partial u}.$$

$$(11) \quad w \frac{\partial a}{\partial v} + a \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} - n \frac{\partial X_1}{\partial v}.$$

Multipliziert man (10) mit $\frac{\partial x}{\partial v}$, (11) mit $\frac{\partial x}{\partial u}$ und addiert jedesmal die analogen Gleichungen, so folgt

$$(12) \quad w \sum \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial u} \sum a \frac{\partial x}{\partial v} = \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - n \sum \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v},$$

$$(13) \quad w \sum \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \sum a \frac{\partial x}{\partial u} = \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - n \sum \frac{\partial X_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Nun ist für die Leitfläche nach II. § 2, (13)

$$(14) \quad \sum \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \sum \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}$$

und nach II. § 2, (9)

$$(15) \quad \sum a \frac{\partial x}{\partial v} = \sum a \frac{\partial x}{\partial u} = 0.$$

Außerdem ist wegen (4) und § 21, (5)

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Aus (12) und (13) folgt daher durch Subtraktion

$$\sum \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \sum \frac{\partial X_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Für das Strahlensystem (6) ist also die Bedingung (4) erfüllt: dasselbe ist demnach in der Tat ein Normalensystem. Erleidet der Lichtstrahl an der Leitfläche statt der Brechung eine Reflexion, so ist $\varepsilon + \varepsilon_1 = \pi$ und daher in (7) $n = 1$ zu setzen, womit der Satz auch für den Fall der Reflexion bewiesen ist.

Bemerkung. Die Flächen, welche das gebrochene Strahlensystem orthogonal schneiden, erhält man, wenn in (5) für X, Y, Z bezüglich X_1, Y_1, Z_1 gesetzt wird. Nimmt man aus (9) die Werte von X_1, Y_1, Z_1 , so folgt aus (5) mit Berücksichtigung von (15)

$$t_1 = \frac{t}{n} + \gamma,$$

wo γ eine Konstante ist. Ist v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts für das erste Medium, v_1 die für das zweite, so ist $n = \frac{v}{v_1}$; aus der letzten Gleichung folgt nun

$$-\frac{t}{v} + \frac{t_1}{v_1} = \delta,$$

wo δ eine andere Konstante ist. Möge nun Q der Schnittpunkt eines Lichtstrahls mit einer Orthogonalfläche im ersten Medium, P der Schnittpunkt mit der brechenden Fläche, R der Schnittpunkt des gebrochenen Strahls mit einer Orthogonalfläche des gebrochenen Systems sein,

so ist, da Q eine negative Abszisse hat, $-\frac{t}{v}$ die Zeit,

welche das Licht zur Zurücklegung des Wegs QP , $\frac{t_1}{v_1}$ die Zeit, welche das Licht für den Weg PR braucht. Die obige Gleichung drückt daher den wichtigen, in der geometrischen Optik viel gebrauchten Satz aus, daß jeder Lichtstrahl von einer Orthogonalfläche des ersten Mediums bis zu einer Orthogonalfläche des zweiten Mediums dieselbe Zeit braucht.

§ 23. Grenzpunkte und Hauptebenen. Isotrope Strahlensysteme.

Wir kehren zur Betrachtung der allgemeinen Strahlensysteme zurück und bestimmen aus § 21, (22) die extremen Werte von r (der Abszisse des kürzesten Abstandes). Man hat in jener Gleichung $\frac{du}{dv}$ als variabel zu betrachten und erhält als Bedingung des Maximums (bzw. Minimums) von r

$$(1) \quad D du + \left(\frac{D' + D'_1}{2} \right) dv - r (E_0 du + F_0 dv) = 0,$$

$$\left(\frac{D' + D'_1}{2} \right) du + D'' dv - r (F_0 du + G_0 dv) = 0.$$

Dabei ist die zweite Gleichung eine Folge der ersten, da aus § 21, (22) sich ergibt:

$$du \left\{ D du + \left(\frac{D' + D'_1}{2} \right) dv - r (E_0 du + F_0 dv) \right\} \\ + dv \left\{ \left(\frac{D' + D'_1}{2} \right) du + D'' dv - r (F_0 du + G_0 dv) \right\} = 0.$$

Durch Elimination von du , dv aus (1) erhält man für die extremen Werte von r die quadratische Gleichung

$$(2) \quad (E_0 G_0 - F_0^2) r^2 - \{ D'' E_0 - (D' + D'_1) F_0 + D G_0 \} r \\ + D D'' - \left(\frac{D' + D'_1}{2} \right)^2 = 0.$$

Die Diskriminante dieser in r quadratischen Gleichung läßt sich genau so, wie es in Rk. u. Fl. II für die Gleichung 14a von § 3 gezeigt wurde [vgl. ebendort (22)], als Summe von zwei Quadraten darstellen, woraus zu schließen ist, daß die Wurzeln r_1 und r_2 von (2) stets reell und im allgemeinen voneinander verschieden sind. Es werden so auf jedem Strahle (u, v) zwei stets reelle Punkte definiert, die man die Grenzpunkte des Strahles nennt, weil der Fußpunkt des kleinsten Abstandes des Strahles (u, v) von jedem benachbarten zwischen diese Grenzpunkte fällt.

Eliminiert man aus (1) r , so folgt für $\frac{du}{dv}$ die quadratische Gleichung

$$(3) \quad \left(\frac{D' + D'_1}{2} E_0 - D F_0 \right) du^2 + \left(D'' E_0 - D G_0 \right) du dv \\ + \left(D'' F_0 - \frac{D' + D'_1}{2} G_0 \right) dv^2 = 0,$$

durch welche in jedem Punkt (u, v) der Leitfläche zwei Richtungen definiert werden: sucht man nun für den Strahl (u, v) den Fußpunkt des kürzesten Abstandes zwischen ihm und den in diesen Richtungen folgenden Strahlen, so erhält man eben die Grenzpunkte. Geht man auf der Leitfläche immer in den durch (3) definierten Richtungen weiter, so erhält man auf dieser ein doppelt unendliches Kurvensystem und (3) stellt die Differentialgleichung dieses Systems dar.

Die Systemstrahlen längs einer dieser Kurven erfüllen eine Regelfläche, deren Striktionslinie der Ort eines der Grenzpunkte der Strahlen ist. Durch jeden Strahl des Strahlensystems gehen zwei Regelflächen dieser Art; diese Regelflächen nennt man die Hauptflächen. Ihre Differentialgleichung ist die Gleichung (3).

Es ist nun von Wichtigkeit zu bemerken, daß, wenn

$$(4) \quad D: \frac{D' + D_1'}{2}: D'' = E_0: F_0: G_0$$

ist, die Differentialgleichung (3) für alle Werte $\frac{du}{dv}$ befriedigt und darum illusorisch wird. Für diesen Fall folgt aus § 21, (22), daß die Abszissen der Fußpunkte der kürzesten Abstände für alle Nachbarstrahlen alle einander gleich werden und daher auch die beiden Grenzpunkte zusammenfallen. Diese speziellen Strahlensysteme, die durch (4) definiert sind, heißen nach Ribaucour isotrope Strahlensysteme. Dieselben werden in § 26 näher untersucht werden. Aus dem Gesagten ergibt sich der

Satz 1. In jedem isotropen Strahlensystem fallen die Fußpunkte sämtlicher Minimalabstände des Strahles (u, v) von allen Nachbarstrahlen in Einen Punkt des Strahls, welcher der Mittelpunkt heißt. In den Mittelpunkt fallen auch die beiden Grenzpunkte.

Auch sieht man, daß bei isotropen Strahlensystemen jede Regelfläche als Hauptfläche angesehen werden kann.

Besteht außer (4) auch noch $D' = D_1'$, so hat man nach § 22, Satz 1 ein isotropes Normalensystem. Für jede der Orthogonalflächen fallen dann (vgl. § 22) die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte in den Mittelpunkt des zugehörigen Strahls. Diese Orthogonalflächen bestehen daher aus konzentrischen Kugeln und die Systemstrahlen sind die Radien dieser.

Kehren wir zu den allgemeinen (nicht isotropen) Strahlensystemen zurück, so definieren, wie obenausgeführt, die Gleichungen (3) ein reelles doppelt unendliches Kurvensystem auf der Leitfläche. Wählen wir dieses System als Parameterkurven der Leitfläche, so müssen

in (3) die Koeffizienten von du^2 und dv^2 identisch verschwinden, d. h. es ist

$$D F_0 - \frac{D' + D'_1}{2} E_0 = 0,$$

$$D'' F_0 - \frac{D' + D'_1}{2} G_0 = 0.$$

Hier muß nun entweder $D:D'' = E_0:G_0$ oder $F_0 = \frac{D' + D'_1}{2} = 0$ sein. Die erste Gleichung würde aber mit den zwei vorhergehenden auf die Gleichungen (4), also auf isotrope Systeme führen, die wir für die jetzt anzustellenden Betrachtungen ausgeschlossen haben. Es ist also für diese speziellen Parameterkurven

$$(5) \quad F_0 = 0, \quad D' + D'_1 = 0.$$

Die Gleichung § 21, (22) hat jetzt die Form

$$(6) \quad r = \frac{D du^2 + D'' dv^2}{E_0 du^2 + G_0 dv^2}.$$

Hieraus folgt mit $dv=0$ bzw. $du=0$ für die Abszissen r_1 und r_2 der Grenzpunkte

$$(7) \quad r_1 = \frac{D}{E_0}, \quad r_2 = \frac{D''}{G_0}.$$

Unter derselben Annahme (5) berechnen wir ferner nach § 21, (20) die Richtungskosinus l_1, m_1, n_1 und l_2, m_2, n_2 für die Richtungen der kleinsten Abstände in den Grenzpunkten. Es folgt so mit $dv=0$ bzw. $du=0$ und nach (5)

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial X}{\partial v}, \quad m_1 = \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad n_1 = \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial Z}{\partial v};$$

$$l_2 = \frac{-1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial X}{\partial u}, \quad m_2 = \frac{-1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial Y}{\partial u}, \quad n_2 = \frac{-1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial Z}{\partial u}.$$

Aus diesen Gleichungen und aus (5) folgt

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

und der

Satz 2. Die Richtungen der kürzesten Abstände in den Grenzpunkten eines Strahles stehen aufeinander senkrecht.

Die zwei Ebenen durch den Strahl, welche durch diese zwei kürzesten Abstände gelegt werden können, heißen die Hauptebenen des Strahles: die beiden Hauptebenen stehen daheraufeinander senkrecht.

Bezeichnet man mit ω den Winkel, den der kleinste Abstand dp des Strahles (u, v) vom Strahl $(u + du, v + dv)$ mit dem kürzesten Abstand im ersten Grenzpunkt ($dv = 0$) bildet, so hat man $\cos \omega = ll_1 + mm_1 + nn_1$ und daher nach § 21, (20)

$$\cos^2 \omega = \frac{E_0 du^2}{E_0 du^2 + G_0 dv^2}, \quad \sin^2 \omega = \frac{G_0 dv^2}{E_0 du^2 + G_0 dv^2}.$$

Aus diesen Gleichungen und (6), (7) folgt die Hamiltonsche¹⁾ Gleichung

$$(8) \quad r = r_1 \cos^2 \omega + r_2 \sin^2 \omega.$$

§ 24. Abwickelbare Flächen, Brennpunkte der Strahlensysteme.

Jede Gleichung von der Form

$$(1) \quad \Phi(u, v) = 0$$

scheidet aus dem Strahlensystem ∞^1 Strahlen aus; diese bilden eine Regelfläche, vgl. § 21, (2). Gibt es unter diesen Regelflächen abwickelbare Flächen?

Wir haben zu diesem Zweck die Bedingung aufzustellen dafür, daß der Strahl (u, v) den benachbarten $(u + du, v + dv)$ schneidet.

Setzt man in § 21, (11) $dp = 0$ und multipliziert die Gleichungen der Reihe nach zuerst mit $\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial u}$, dann mit $\frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial v}, \frac{\partial Z}{\partial v}$ und addiert beidemale, so folgt

$$\text{wegen } \sum X \frac{\partial X}{\partial u} = \sum X \frac{\partial X}{\partial v} = 0$$

¹⁾ Vgl. die Fußnote 1) zu § 21, S. 91.

$$(2) \quad \begin{aligned} D \, du + D' \, dv - \varrho (E_0 \, du + F_0 \, dv) &= 0, \\ D'_1 \, du + D'' \, dv - \varrho (F_0 \, du + G_0 \, dv) &= 0, \end{aligned}$$

wobei für t_1 , das bis auf eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung gleich t ist (vgl. § 21, S. 94), ϱ gesetzt ist: ϱ bedeutet also die Abszisse des Schnittpunktes der beiden konsekutiven Strahlen. Eliminiert man aus (2) ϱ , so folgt

$$(3) \quad \begin{vmatrix} D \, du + D' \, dv & E_0 \, du + F_0 \, dv \\ D'_1 \, du + D'' \, dv & F_0 \, du + G_0 \, dv \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung drückt in der Tat nach § 21, (21) aus, daß $dp=0$ ist. Eliminiert man dagegen aus (2) $du:dv$, so erhält man

$$(4) \quad \varrho^2 (E_0 G_0 - F_0^2) - \varrho [D'' E_0 - (D' + D'_1) F_0 + D G_0] + D D'' - D' D'_1 = 0.$$

Die Differentialgleichung (3) definiert auf der Leitfläche zwei Kurvensysteme: die Strahlen des Systems längs dieser Kurven bilden die abwickelbaren Flächen, deren Gleichungen (1) man durch Integration von (3) erhält. Also

Satz 1. Die Systemstrahlen lassen sich in zwei (reelle oder imaginäre) Scharen abwickelbarer Flächen zusammenfassen, derart, daß durch jeden Strahl zwei abwickelbare Flächen hindurchgehen.

Für einen Strahl des Systems gibt es daher zwei unendlich benachbarte Strahlen, die ihn schneiden: die Abszissen ϱ_1 und ϱ_2 der beiden Schnittpunkte P_1 und P_2 sind die Wurzeln von (4). Diese Punkte nennt man die Brennpunkte des Strahles: für ein optisches Strahlensystem sind die Brennpunkte die Orte größter Licht- und Wärmekonzentration, daher der Name. Die Brennpunkte können reell oder imaginär [z. B. bei den isotropen Systemen (vgl. § 26)] sein. Aus (4) und § 23, (2) folgt

$$(5) \quad \varrho_1 + \varrho_2 = r_1 + r_2$$

und

$$\varrho_1 \varrho_2 = r_1 r_2 + \frac{(D' - D'_1)^2}{4(E_0 G_0 - F_0^2)}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$(6) \quad (r_1 - r_2)^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2 = \frac{(D' - D'_1)^2}{E_0 G_0 - F_0^2}.$$

Aus (5) ergibt sich, daß der Mittelpunkt der Grenzpunkte mit dem Mittelpunkt der Brennpunkte zusammenfällt. Dieser Punkt heißt daher der Mittelpunkt des Strahls und der Ort der Mittelpunkte die Mittelfläche. Die Brennpunkte liegen innerhalb der Grenzpunkte, wie aus (6) und der Definition der Grenzpunkte hervorgeht.

Die Brennpunkte führen noch zu zwei Ebenen, den Brennebenen: es sind die Ebenen durch den Strahl und die beiden benachbarten durch die Brennpunkte gehenden Strahlen. Um die Lage der Brennebenen zu den Hauptebenen (vgl. § 23), und den Winkel Ω der Brennebenen zu bestimmen, wählen wir als Leitfläche des Strahlensystems die Mittelfläche. Ist d der Abstand der Grenzpunkte, δ der Abstand der Brennpunkte, so ist

$$(7) \quad r_1 = \frac{d}{2}, \quad r_2 = -\frac{d}{2}, \quad \varrho_1 = \frac{\delta}{2}, \quad \varrho_2 = -\frac{\delta}{2}$$

und die Hamiltonsche Gleichung § 23, (8) lautet

$$(8) \quad r = \frac{d}{2} \cos 2\omega.$$

Dabei bedeutet ω den Winkel, den der kürzeste Abstand entsprechend der Abszisse r mit dem kürzesten Abstand im ersten Grenzpunkt ($\omega = 0$) bildet. Aus (8)

erhält man für $\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{4}$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ der Reihe nach

$r = \frac{d}{2}$, $r = 0$, $r = -\frac{d}{2}$, d. h. den ersten Grenzpunkt, den

Mittelpunkt und den zweiten Grenzpunkt. Sind nun ω_1 und ω_2 die Werte¹⁾ für ω in den beiden Brennpunkten

¹⁾ Auch bei den Brennpunkten kann von einer Richtung des kürzesten Abstands gesprochen werden, da dieser nicht gleich Null, sondern nur unendlich klein von der zweiten Ordnung ist. Die Richtungen der kürzesten Abstände in den Brennpunkten stehen, wie man geometrisch leicht einsieht, auf den Brennebenen senkrecht.

$\varrho_1 = \frac{\delta}{2}$, $\varrho_2 = -\frac{\delta}{2}$, so ist nach (8)

$$(9) \quad \frac{\delta}{d} = \cos 2\omega_1; \quad -\frac{\delta}{d} = \cos 2\omega_2.$$

Die Brennebenen bilden nun mit der ersten Hauptebene bezüglich die Winkel $\omega_1 + \frac{\pi}{2}$ und $\omega_2 + \frac{\pi}{2}$, und der Winkel Ω der beiden Brennebenen ist daher gleich $\omega_2 - \omega_1$.

Aus (9) folgt $\omega_1 + \omega_2 = \frac{\pi}{2}$, woraus sich ergibt, daß die Brennebenen mit den Hauptebenen gleiche Winkel bilden.

Es ist weiter $\Omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\pi}{2} - 2\omega_1$ und daher nach (9)

$$(10) \quad \sin \Omega = \frac{\delta}{d}.$$

Satz 2. Der Sinus des Winkels der Brennebenen ist gleich dem Verhältniß des Brennpunkt- abstands zum Grenzpunkt- abstand.

§ 25. Brennflächen.

Die Brennpunkte führen weiter zu zwei wichtigen Flächen, den Brennflächen — dem geometrischen Ort der ersten bzw. zweiten Brennpunkte. Die Brennflächen werden auch durch die Rückkehrkanten der beiden Scharen von abwickelbaren Flächen (vgl. § 24) erzeugt und zwar die erste Brennfläche B_1 , durch die Rückkehrkanten der ersten Schar, die zweite B_2 durch die Rückkehrkanten der zweiten Schar. Diese Rückkehrkanten heißen die Brennlinien.

Zur weiteren Untersuchung legen wir als Leitfläche die Mittelfläche zu Grunde; dieselbe möge durch die Gleichungen $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ gegeben sein. Sind wieder X, Y, Z die Richtungskosinus des Strahls, x_1, y_1, z_1 die Koordinaten des ersten Brennpunkts P_1 , der also ein Punkt von B_1 ist, und ebenso x_2, y_2, z_2 die Koordinaten des zweiten Brennpunkts P_2 (auf B_2),

so lauten, wenn δ wieder den Brennpunktsabstand bedeutet, die Gleichungen für B_1

$$(1) \quad x_1 = x + \frac{\delta}{2} X, \quad y_1 = y + \frac{\delta}{2} Y, \quad z_1 = z + \frac{\delta}{2} Z$$

und die Gleichungen für B_2

$$(2) \quad x_2 = x - \frac{\delta}{2} X, \quad y_2 = y - \frac{\delta}{2} Y, \quad z_2 = z - \frac{\delta}{2} Z.$$

Zur Vereinfachung setzen wir weiter voraus, daß auf der Mittelfläche die Kurven, längs deren sich konsekutive Systemstrahlen schneiden, die Parameterkurven $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ seien (s. Fig. 8). Die Strahlen längs der Kurven $v = \text{konst.}$ bilden dann die eine Schar, die Strahlen längs der Kurven $u = \text{konst.}$ die andere Schar von abwickelbaren Flächen. Die Rückkehrkanten der abwickelbaren Flächen $v = \text{konst.}$ erfüllen dann eine der Brennflächen, sagen wir B_1 , und die Kanten der Flächen $u = \text{konst.}$ B_2 . Auf B_1 sind also die Kurven $v = \text{konst.}$, auf B_2 die Kurven $u = \text{konst.}$ die Brennlinien. Wir leiten nun zunächst einige Sätze für die Brennflächen ab.

Jeder Systemstrahl ist Erzeugende der beiden durch ihn hindurch gehenden abwickelbaren Flächen und berührt daher die beiden Rückkehrkanten dieser, d. h. beide Brennflächenmäntel: Das Strahlensystem besteht also aus der Gesamtheit der den beiden Mänteln gemeinsamen Tangenten. Man hat somit den

Satz 1. Jeder Systemstrahl berührt B_1 und B_2 in den Brennpunkten P_1 und P_2 , und zwar berührt er in P_1 die Brennlinie $v = \text{konst.}$ von B_1 , in P_2 die Brennlinie $u = \text{konst.}$ von B_2 (s. Fig. 8). Das Strahlensystem besteht daher auch aus der Gesamtheit der Tangenten der Brennlinien von B_1 (und ebenso von B_2).

Umgekehrt sieht man auch unschwer die Richtigkeit des folgenden Satzes ein:

Satz 2. Die gemeinsamen Tangenten zweier Flächen bilden ein Strahlensystem, dessen Brennflächen eben die zwei Flächen sind.

Nehmen wir weiter längs einer Kurve $v = \text{konst.}$ der Mittelfläche zwei konsekutive Strahlen, so ist die Ebene

dieser zwei Strahlen (erste Brennebene) Schmiegungeebene der Brennlinie $v = \text{konst.}$ durch P_1 in B_1 . Diese Ebene ist aber auch Tangentialebene von B_2 in P_2 . (In der Figur ist bei P_2 ein Teil dieser Tangentialebene schraffiert gezeichnet.) Wir haben also

Satz 3. Die Schmiegungeebene der Brennlinie $v = \text{konst.}$ von B_1 in P_1 ist die Tangentialebene der Fläche B_2 in P_2 und analog für B_2, P_2 und B_1, P_1 .

Satz 4. Die Schmiegungeebene der Brennlinie in P_1 auf B_1 ist die erste Brennebene, die Tangentialebene in P_1 an B_1 die zweite, ihr Winkel ist daher der Winkel Ω der Brennebenen.

Die Schmiegungeebenen der Brennlinie $v = \text{konst.}$ von B_1 bilden eine abwickelbare Fläche, die auch erhalten wird, wenn man alle Tangentialebenen an B_2 längs der Parameterlinie $v = \text{konst.}$ von B_2 legt. Da nun die Erzeugenden dieser abwickelbaren Fläche die Schnittgeraden konsequenter Tangentenebenen von B_2 sind und die Richtung der Kurven $u = \text{konst.}$ auf B_2 angeben, so folgt nach Rk. u. Fl. I. § 19, S. 96.

Satz 5. Die Parameterlinien bilden auf den Brennflächen ein konjugiertes System. Oder die beiden Scharen von abwickelbaren Flächen schneiden jede der Brennflächen in einem konjugierten System.

Weiter folgt aus Satz 4

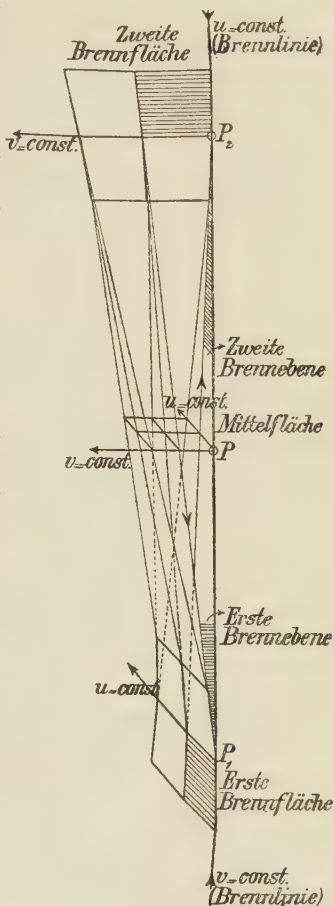


Fig. 8.

Satz 6. In der sphärischen Abbildung des Strahlensystems ist der Winkel der Kurven auf der Kugel, die den Parameterkurven der Leitfläche entsprechen, in jedem Punkt gleich dem Winkel Ω der Brennebenen des betreffenden Strahles.

Bemerkung. Der Leser bemerkt die große Ähnlichkeit dieser Sätze mit den Sätzen über die beiden Mäntel der Zentralfäche (vgl. II. § 5). In der Tat sind diese letzteren für das Normalensystem einer Fläche identisch mit den Brennflächen, da hier die abwickelbaren Flächen von den Flächennormalen längs der Krümmungslinien gebildet werden. Für ein Normalsystem ist weiter nach § 22, (4) $D' = D'_1$ und daher nach § 24, (6)

$d = \delta$ und nach § 24, (10) $\Omega = \frac{\pi}{2}$. Die Brennpunkte fal-

len also mit den Grenzpunkten zusammen (es sind die Hauptkrümmungsmittelpunkte) und die Brennebenen (Hauptschnitte) stehen aufeinander senkrecht, woraus nach Satz 4 folgt, daß die Rückkehrkanten der abwickelbaren Flächen geodätische Linien desjenigen Mantels sind, den die Rückkehrkanten erzeugen (vgl. II. § 5). Umgekehrt ist jedes Strahlensystem, für das die Grenzpunkte mit den Brennpunkten zusammenfallen, notwendig ein Normalensystem; denn mit $d = \delta$ folgt aus § 24, (6) $D' = D'_1$, womit nach § 22, (4) das Gesagte bewiesen ist. Ebenso folgt, daß, wenn die Brennebenen eines Strahlensystems aufeinander senkrecht stehen oder (was auf dasselbe hinauskommt), wenn die Rückkehrkanten der abwickelbaren Flächen geodätische Linien des erzeugten Brennflächenmantels sind, daß das Strahlensystem

notwendig ein Normalensystem ist; denn aus $\Omega = \frac{\pi}{2}$ folgt

$d = \delta$ und dann $D' = D'_1$. Es ist nun leicht zu sehen, wie man zu einer beliebigen Fläche S Strahlensysteme konstruieren kann, für die S ein Brennflächenmantel ist: Man nehme auf S als Parameterlinien ein konjugiertes System (vgl. Satz 5) und ziehe an die Kurven $v = \text{konst.}$ die Tangenten. Für dieses Strahlensystem ist S der eine Brennflächenmantel; den andern erhält man, indem man längs der Kurven $u = \text{konst.}$ die Tangenten an die Kurven

$v = \text{konst.}$ zieht; denn die längs einer einzelnen Kurve $u = \text{konst.}$ gezogenen Systemstrahlen bilden nach der Grundeigenschaft konjugierter Richtungen (s. § 19, S. 96) eine abwickelbare Fläche. Ihre Rückkehrkante ist eine Kurve $u = \text{konst.}$ auf der zweiten Brennfläche; diese letztere ist der geometrische Ort der Rückkehrkanten. Zugleich sieht man, daß die Brennflächenmäntel nur dann zusammenfallen können, wenn die Systemstrahlen Tangenten der einen Schar von Asymptotenkurven einer Fläche S sind; denn diese fallen mit dem konjugierten System zusammen.

§ 26. Die isotropen Strahlensysteme.

Wir untersuchen nunmehr die in § 23 definierten isotropen Strahlensysteme. Dieselben sind besonders wegen ihrer innigen Beziehung zu den Minimalflächen interessant.¹⁾

In einem isotropen Strahlensysteme fallen, wie in § 23 ausgeführt wurde, für jeden Strahl die Grenzpunkte in einen Punkt zusammen, der der Mittelpunkt des Strahls heißt. Die Leitfläche sei die Mittelfläche, d. h. der Ort der Mittelpunkte. Als Parameterlinien wählen wir diejenigen Kurven der Mittelfläche, deren sphärisches Bild die Minimallinien der Kugel sind. Wir setzen also nach Rk. u. Fl. II. § 8, (17)

$$(1) \quad X = \frac{u+v}{1+uv}, \quad Y = \frac{i(v-u)}{1+uv}, \quad Z = \frac{uv-1}{1+uv}.$$

Nach II. § 8, (16) ist dann

$$(2) \quad \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 = E_0 = 0, \quad \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = F_0 = \frac{2}{(1+uv)^2},$$

$$\sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 = G_0 = 0.$$

¹⁾ Vgl. die wichtige Arbeit von A. Ribaucour, „Étude des élassoïdes ou des surfaces à courbure moyenne nulle“. Mém. cour. Bruxelles, T. 44. 1882, p. 1—236.

Da die Abszisse r des kürzesten Abstands des Strahls (u, v) von allen Nachbarstrahlen Null sein muß, so ist nach § 21, (22)

$$D = 0, \quad D' + D_1' = 0, \quad D'' = 0$$

oder nach § 21, (5) ausführlicher geschrieben

$$(3) \quad \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Aus diesen drei partiellen Differentialgleichungen hat man x, y, z als Funktionen von u, v zu bestimmen. Ehe wir an die Integration des Systems (3) gehen, wollen wir eine interessante Deutung der Gleichungen geben. Seien X, Y, Z für den Augenblick die Koordinaten einer beliebigen Fläche S , x, y, z die einer zweiten Fläche s und setzt man

$$X' = X + \varepsilon x, \quad Y' = Y + \varepsilon y, \quad Z' = Z + \varepsilon z,$$

wo ε eine sehr kleine, aber konstante Größe ist, deren Potenzen von der zweiten an vernachlässigt werden können, so bedeuten X', Y', Z' die Koordinaten einer dritten Fläche S' , die von der Fläche S nur wenig abweichen wird. Ist nun S' auf S abwickelbar, so sagt man, daß S' aus S durch eine unendlich kleine Verbiegung (oder durch infinitesimale Deformation) hervorgehe.

Damit S' auf S abwickelbar ist, muß

$$dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

oder

$$\sum dX^2 = \sum dX^2 + 2\varepsilon \sum dX dx + \varepsilon^2 \sum dx^2$$

sein.

Da ε^2 gegen ε vernachlässigt werden kann, so folgt

$$(4) \quad dX dx + dY dy + dZ dz = 0$$

oder

$$\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) = 0.$$

Diese Gleichung muß aber für alle Werte von du, dv identisch erfüllt sein, d. h. die Koeffizienten von $du^2, dudv, dv^2$ müssen einzeln verschwinden. Setzt man aber diese Koeffizienten Null, so erhält man gerade die

Gleichungen (3). Der Gleichung (4) kann man nun folgende geometrische Deutung geben: Jedem Wertepaar (u, v) entspricht ein Punkt von S und s , die Flächen sind also Punkt für Punkt aufeinander bezogen; der Fortschrittingsrichtung dX, dY, dZ in der Tangentialebene des Punkts (u, v) für die Fläche S , entspricht die Richtung dx, dy, dz in der Tangentialebene des entsprechenden Punkts der Fläche s . Die Gleichung (4) sagt nun aus, daß jedes Linienelement von S auf dem entsprechenden von s senkrecht steht. Man sagt: Die beiden Flächen S und s entsprechen sich durch Orthogonalität der Elemente. Kennt man also eine Fläche s , die der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente entspricht, so geben die Gleichungen

$$X' = X + \varepsilon x, \quad Y' = Y + \varepsilon y, \quad Z' = Z + \varepsilon z$$

eine Fläche S' , die durch unendlich kleine Verbiegung aus S hervorgegangen ist.

Kehren wir zu unserm speziellen Problem zurück, so sieht man, daß die Mittelfläche jedes isotropen Systems der Kugel durch Orthogonalität der Elemente entspricht. Da man nun die Gleichungen (3), wie wir sogleich zeigen werden, in allgemeinsten Weise integrieren kann, so ist gleichzeitig die Aufgabe, die allgemeinsten unendlich kleinen Verbiegungen der Kugel zu finden, gelöst.¹⁾

Zur Integration der Gleichungen (3) setze man in Übereinstimmung mit der mittleren Gleichung (3)

$$(5) \quad \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = +\varphi, \quad \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = -\varphi,$$

wo φ eine noch unbekannte Funktion von u, v ist, und differenziere die erste dieser Gleichungen nach u , die zweite nach v ; man erhält so:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \sum \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \frac{\partial x}{\partial v} + \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \sum \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \frac{\partial x}{\partial u} + \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}. \end{aligned}$$

¹⁾ Wegen des Problems der unendlich kleinen Verbiegungen für allgemeine Flächen verweisen wir den Leser auf die größeren Werke von Darboux oder Bianchi.

Weiter differenziere man die erste Gleichung (3) nach v , die letzte nach u ; es ergibt sich

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = - \sum \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = - \sum \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Jetzt eliminiere man mit Hilfe dieser Gleichungen aus (6) die zweiten Ableitungen von x , y , z . Es folgt

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \sum \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \frac{\partial x}{\partial v} - \sum \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \\ - \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \sum \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \frac{\partial x}{\partial u} - \sum \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen II. § 4, (18), in denen die Größen p_0 , q_0 usw. nach II. § 1, (23) (24) für die Kugel zu berechnen sind, lauten hier

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= \frac{1}{F_0} \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial F_0}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} &= -F_0 X, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} &= \frac{1}{F_0} \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial F_0}{\partial v}, \end{aligned}$$

sowie die analogen für Y , Z . Man erhält nun aus (7) und den letzten Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \frac{1}{F_0} \frac{\partial F_0}{\partial u} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + F_0 \sum X \frac{\partial x}{\partial u}, \\ - \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \frac{1}{F_0} \frac{\partial F_0}{\partial v} \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + F_0 \sum X \frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned}$$

oder nach (5)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\varphi}{F_0} \frac{\partial F_0}{\partial u} + F_0 \sum X \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\varphi}{F_0} \frac{\partial F_0}{\partial v} - F_0 \sum X \frac{\partial x}{\partial v},$$

oder

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\varphi}{F_0} \right), \quad \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\varphi}{F_0} \right).$$

Setzt man nun

$$\varphi = \Phi \cdot F_0,$$

also nach (5)

$$(9) \quad \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \Phi \cdot F_0, \quad \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = -\Phi \cdot F_0,$$

wo Φ eine noch zu bestimmende Funktion von u, v ist, dann hat man

$$(10) \quad \sum X \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Die Gleichungen (9), (10) und die erste und letzte Gleichung (3) löse man nach $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ bzw. $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ auf und erhält so

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= X \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \Phi \frac{\partial X}{\partial u}, \\ -\frac{\partial x}{\partial v} &= X \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \Phi \frac{\partial X}{\partial v}. \end{aligned}$$

sowie die analogen Gleichungen für y, z . Setzt man die Werte für $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$ usw. aus (11) in die genannten Gleichungen ein und berücksichtigt (2) und die Identitäten $\sum X^2 = 1, \sum X \frac{\partial X}{\partial u} = \sum X \frac{\partial X}{\partial v} = 0$, so sieht man die Richtigkeit der Gleichungen (11) sofort ein. Damit nun die Gleichungen (11) integrabel sind, müssen die beiden aus (11) sich ergebenden Werte von $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ einander gleich sein, diese sind aber

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + X \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} - \Phi \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \\ -\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + X \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \Phi \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \end{aligned}$$

und man erhält durch Addieren

$$X \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} - \Phi \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = 0,$$

oder nach (8)

$$(12) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} + \Phi \cdot F_0 = 0.$$

Die Integration der Gleichungen (3) ist damit zurückgeführt auf die Aufgabe, das allgemeinste Integral von (12) zu finden. Kennt man dieses, so erhält man aus (11) die Koordinaten (x, y, z) der Mittelfläche des allgemeinsten isotropen Systems durch Quadratur.

Zunächst sieht man, daß $\Phi = 0$ ein partikuläres Integral ist; dies führt auf $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$, wo α, β, γ drei Konstante sind, die Mittelfläche reduziert sich auf einen Punkt und das spezielle isotrope System besteht aus der Gesamtheit der Strahlen durch diesen Punkt (vgl. § 23, S. 104).

Um zum allgemeinen Fall zurückzukehren, so beachte man, daß die Gleichung (12) mit der mittleren Gleichung (20) von II. § 4 übereinstimmt, wenn man dort $D' = 0$ und $\Phi = T$ setzt. Man sieht daher, daß Φ den Abstand des Ursprungs von der Tangentialebene einer gewissen Fläche M_0 bedeutet, für die $E_0 = G_0 = D' = 0$ ist. Für diese Fläche M_0 ist aber nach II. § 4, (21)

$$(13) \quad E = G = 0$$

und jetzt nach II. § 3, (16)

$$(14) \quad h = 0.$$

Diese Fläche M_0 ist daher eine Minimalfläche, die nach (13) auf ihre Minimallinien bezogen ist.

Die allgemeinste Lösung für (12) ist daher

$$(15) \quad \Phi = X\xi_0 + Y\eta_0 + Z\zeta_0,$$

wenn ξ_0, η_0, ζ_0 die Koordinaten der allgemeinsten auf ihre Minimallinien bezogenen Minimalfläche M_0 bedeuten. Die Formeln von Weierstraß § 4, (10) geben aber die allgemeinste Minimalfläche, womit die Aufgabe dieses Paragraphen im Prinzip erledigt ist.

Es zeigt sich nun, daß man für x, y, z aus (11) eine sehr einfache Darstellung gewinnt, wenn man die Lösung (15) in (11) wirklich einsetzt.

Nach § 4, (15) und (1) dieses Paragraphen sind X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen für die Minimalfläche M_0 im Punkt (u, v) und es ist somit $\sum X \frac{\partial \xi_0}{\partial u} = \sum X \frac{\partial \xi_0}{\partial v} = 0$ und nach (15)

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \xi_0 \frac{\partial X}{\partial u} + \eta_0 \frac{\partial Y}{\partial u} + \zeta_0 \frac{\partial Z}{\partial u}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \xi_0 \frac{\partial X}{\partial v} + \eta_0 \frac{\partial Y}{\partial v} + \zeta_0 \frac{\partial Z}{\partial v}. \end{aligned}$$

Aus (11), (15) und (16) ergibt sich jetzt

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \eta_0 \left(X \frac{\partial Y}{\partial u} - Y \frac{\partial X}{\partial u} \right) + \zeta_0 \left(X \frac{\partial Z}{\partial u} - Z \frac{\partial X}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \eta_0 \left(Y \frac{\partial X}{\partial v} - X \frac{\partial Y}{\partial v} \right) + \zeta_0 \left(Z \frac{\partial X}{\partial v} - X \frac{\partial Z}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Wir wenden nunmehr die Gleichungen II. § 4, (10) an; dabei ist zu beachten, daß X, Y, Z die Koordinaten des sphärischen Bildes der überall negativ gekrümmten Minimalfläche M_0 sind und daher nach den Formeln II. § 4, (9) $a_0 = -a = -X$ usw. ist. Man erhält so:

$$(18) \quad \begin{aligned} Z \frac{\partial Y}{\partial u} - Y \frac{\partial Z}{\partial u} &= i \frac{\partial X}{\partial u}, & Z \frac{\partial Y}{\partial v} - Y \frac{\partial Z}{\partial v} &= -i \frac{\partial X}{\partial v}, \\ X \frac{\partial Z}{\partial u} - Z \frac{\partial X}{\partial u} &= i \frac{\partial Y}{\partial u}, & X \frac{\partial Z}{\partial v} - Z \frac{\partial X}{\partial v} &= -i \frac{\partial Y}{\partial v}, \\ Y \frac{\partial X}{\partial u} - X \frac{\partial Y}{\partial u} &= i \frac{\partial Z}{\partial u}, & Y \frac{\partial X}{\partial v} - X \frac{\partial Y}{\partial v} &= -i \frac{\partial Z}{\partial v}, \end{aligned}$$

wie man übrigens auch aus (1) direkt nachrechnet. Aus (17) und (18) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= i \left(\zeta_0 \frac{\partial Y}{\partial u} - \eta_0 \frac{\partial Z}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= i \left(\zeta_0 \frac{\partial Y}{\partial v} - \eta_0 \frac{\partial Z}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Da nach (3) (x, y, z) offenbar nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, so können wir unbeschadet

der Allgemeinheit den Faktor i weglassen; es wird sich dann zeigen, daß, wenn (ξ_0, η_0, ζ_0) die Koordinaten einer reellen Minimalfläche sind, (x, y, z) ebenfalls reell werden.

Man hat jetzt

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \zeta_0 \frac{\partial Y}{\partial u} - \eta_0 \frac{\partial Z}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \zeta_0 \frac{\partial Y}{\partial v} - \eta_0 \frac{\partial Z}{\partial v}, \end{aligned}$$

oder integriert

$$(20) \quad \begin{aligned} x &= \zeta_0 Y - \eta_0 Z - \int (Y d\zeta_0 - Z d\eta_0), \\ y &= \xi_0 Z - \zeta_0 X - \int (Z d\xi_0 - X d\zeta_0), \\ z &= \eta_0 X - \xi_0 Y - \int (X d\eta_0 - Y d\xi_0). \end{aligned}$$

Sind nun (ξ, η, ζ) die Koordinaten des Punktes (u, v) einer beliebigen Minimalfläche M , (ξ_0, η_0, ζ_0) die Koordinaten der zu M adjungierten Minimalfläche M_0 , so erhält man nach § 6, (4) und (6) umgekehrt die adjungierte Fläche zu M_0 dadurch aus M , daß man zu jedem Punkt von M den bezüglich des Ursprungs symmetrischen Punkt sucht; die Koordinaten des Punkts (u, v) der zu M_0 adjungierten Minimalfläche sind also $-\xi, -\eta, -\zeta$. Nach den Formeln von Schwarz [§ 7, (4)] ist also

$$\begin{aligned} -d\xi &= Y d\zeta_0 - Z d\eta_0, & -d\eta &= Z d\xi_0 - X d\zeta_0, \\ & & -d\zeta &= X d\eta_0 - Y d\xi_0. \end{aligned}$$

Man hat jetzt für die Mittelfläche des allgemeinsten isotropen Strahlensystems die einfachen Formeln¹⁾

$$(21) \quad \begin{cases} x = \xi + \zeta_0 Y - \eta_0 Z, \\ y = \eta + \xi_0 Z - \zeta_0 X, \\ z = \zeta + \eta_0 X - \xi_0 Y, \end{cases}$$

aus denen sofort folgt, daß die Koordinaten (x, y, z) des Punkts (u, v) der Mittelfläche reell sind. Dabei ergeben

¹⁾ Bezüglich dieser Formeln sowie des Inhalts dieses und des nächsten Paragraphen vgl. die Arbeit von K. Kommerell „Strahlensysteme und Minimalflächen“. Math. Ann. Bd. 70. (1911).

sich die Koordinaten (ξ, η, ζ) des Punkts (u, v) der Minimalfläche M aus den Weierstraßschen Gleichungen § 4, (10). Aus eben diesen Gleichungen erhält man auch die Koordinaten (ξ_0, η_0, ζ_0) des Punkts (u, v) der zu M adjungierten Minimalfläche M_0 nur hat man $F(u)$ und $\Phi(v)$ bezüglich durch $i F(u)$ und $-i \Phi(v)$ zu ersetzen.

Man hat so den

Satz 1. Bedeuten (ξ, η, ζ) die Koordinaten eines Punkts P einer beliebigen Minimalfläche, (ξ_0, η_0, ζ_0) die Koordinaten des entsprechenden Punkts P_0 der zu M adjungierten Minimalfläche M_0 und (X, Y, Z) die Koordinaten des gemeinsamen sphärischen Bilds B , so stellen die Gleichungen (21) die Mittelfläche des allgemeinsten isotropen Strahlensystems dar; dabei bedeuten (x, y, z) die Koordinaten des Punkts Q der Mittelfläche. Die Parallele durch Q mit der Flächennormalen im Punkt (ξ, η, ζ) der Minimalfläche M ist der durch Q gehende Systemstrahl des isotropen Strahlensystems.

Aus (21) ergibt sich nun

$$(22) \quad (x - \xi) X + (y - \eta) Y + (z - \zeta) Z = 0,$$

woraus zu schließen ist, daß der Punkt Q der Mittelfläche mit den Koordinaten (x, y, z) auf der Tangentialebene der Minimalfläche M im Punkt P liegt. Diese Tangentialebene ist also die im Mittelpunkt Q des Strahls (u, v) des isotropen Strahlensystems errichtete Normalebene; nennt man diese Ebene die Mittelebene, die Enveloppe aller Mittelebenen die Mittelenveloppe des Strahlensystems, so hat man den

Satz 2. (Ribaucour.¹⁾) Die Mittelenveloppe jedes isotropen Strahlensystems ist eine Minimalfläche. In den Gleichungen (21) bedeuten (ξ, η, ζ) die Koordinaten des Punkts (u, v) der Mittelenveloppe. Umgekehrt kann jede Minimalfläche als Mittelenveloppe eines isotropen Strahlensystems erzeugt werden, und zwar auf ∞^3 Arten.

¹⁾ Vgl. die Fußnote auf S. 113.

Das Letztere folgt daraus, daß die Koordinaten ξ_0 , η_0 , ζ_0 mit additiven Konstanten behaftet sind. Es fragt sich jetzt umgekehrt, ob jedes Strahlensystem, dessen Mittelenveloppe eine Minimalfläche ist, auch isotrop ist. Ohne näher auf diese Frage einzugehen, wollen wir nur historisch anführen, daß dies nicht der Fall ist, daß vielmehr jede Minimalfläche Mittelenveloppe von einer sehr großen Klasse nicht isotroper Strahlensysteme sein kann, ja sogar, daß jede Minimalfläche als Mittelenveloppe von unendlich vielen Normalensystemen erzeugt werden kann. [S. z. B. § 33, 11 h]. Dabei ist es interessant, daß den auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen gewisse Normalensysteme zugeordnet werden können derart, daß die Krümmungslinien der Minimalfläche, welche die Mittelenveloppe des Systems ist, den Krümmungslinien der Orthogonalflächen des Normalensystems entsprechen. Wegen der Beweise verweisen wir den Leser auf die in der Fußnote 1) von S. 120 genannte Arbeit.

Die Formeln (21) gestatten nun eine einfache Konstruktion aller isotropen Strahlensysteme. Nach (21) ist

$$\Sigma(x - \xi)X = 0, \quad \Sigma(x - \xi)\xi_0 = 0.$$

Behält man die Bezeichnungen des Satzes 1 bei und ist O der Ursprung des Koordinatensystems, so bedeuten die letzten Gleichungen, daß PQ auf der Ebene OP_0B senkrecht steht (vgl. Fig. 9), und zwar so, daß die Richtung OB zur Richtung OP_0 und zu der zu PQ durch den Ursprung parallel gezogenen Richtung ebenso liegt wie die positive x -Achse zur positiven y - und z -Achse. Dies sieht man sofort ein, wenn man durch stetige Abänderung OB mit der x -Achse, OP_0 mit der y -Achse zusammenfallen läßt. Es fällt dann, wie die Formeln (21) zeigen, PQ mit der Richtung der positiven z -Achse zusammen. Nachdem so die Richtung von PQ in der Tangentialebene von P an die Minimalfläche M in einfacher Weise definiert ist, berechnen wir noch die Länge von PQ .

Aus (21) und dem ersten Determinantensatz der Einleitung in Rk. u. Fl. I. folgt

$$PQ^2 = \Sigma(\zeta_0 Y - \eta_0 Z)^2 = \begin{vmatrix} \Sigma X^2 & \Sigma \xi_0 X \\ \Sigma \xi_0 X & \Sigma \xi_0^2 \end{vmatrix}$$

oder

$$PQ^2 = \sum \xi_0^2 - (\sum \xi_0 X)^2.$$

Der Strahl OB möge die Tangentialebene an M_0 (in P_0) in S treffen, dann ist $OS = \sum \xi_0 X$, d. h. gleich dem Abstand des Ursprungs von der genannten Tangentialebene. Da weiter $OP_0^2 = \sum \xi_0^2$ ist, so sieht man, daß $PQ = P_0S$ ist. Dreht man also P_0S um P_0 in der Tangentialebene an M_0 um $\frac{\pi}{2}$ in dem oben angegebenen

Sinn, so gibt die neue Lage von P_0S die Größe und Richtung von PQ an. Zieht man endlich durch Q die Parallele zur Flächennormalen in P , so ist diese der durch Q gehende Systemstrahl.

Bemerkung. Für diejenigen Leser, die mit Vektoranalysis vertraut sind, mag bemerkt werden, daß die angegebene Konstruktion sich sofort ergibt, wenn man beachtet, daß der Vektor PQ das vektorielle Produkt der beiden Vektoren OB und OP_0 ist und daß OB ein Einheitsvektor ist. Man sieht auch, daß die Gleichungen (21) vektoranalytisch sehr einfach geschrieben werden können.

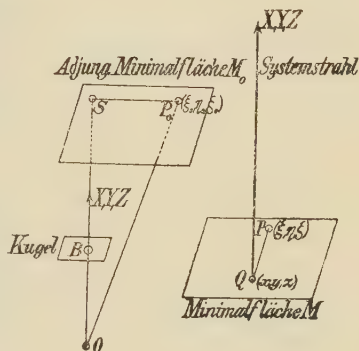


Fig. 9.

§ 27. Untersuchung der Mittelfläche eines isotropen Strahlensystems.

Zur Untersuchung der Mittelfläche eines isotropen Strahlensystems berechnen wir zuerst nach Rk. u. Fl. II. § 2, (11) die Richtungskosinus a_1, b_1, c_1 der Flächennormalen im Punkt (u, v) der Mittelfläche. Nach den Formeln (19) des § 26 erhält man so

$$\begin{aligned} a_1 A_1 = & \left(\xi_0 \frac{\partial Z}{\partial u} - \zeta_0 \frac{\partial X}{\partial u} \right) \left(\eta_0 \frac{\partial X}{\partial v} - \xi_0 \frac{\partial Y}{\partial v} \right) \\ & - \left(\eta_0 \frac{\partial X}{\partial u} - \xi_0 \frac{\partial Y}{\partial u} \right) \left(\xi_0 \frac{\partial Z}{\partial v} - \zeta_0 \frac{\partial X}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

oder

$$a_1 A_1 = \xi_0^2 \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial u} \right) + \xi_0 \eta_0 \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) \\ + \xi_0 \zeta_0 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} \right)$$

oder nach den Gleichungen¹⁾ (8) und (9) von II. § 4

$$(1) \quad a_1 A_1 = -\xi_0 \cdot i F_0 \Sigma \xi_0 X$$

sowie die analogen Gleichungen für b_1 und c_1 . Aus (1) ergibt sich: $a_1 : b_1 : c_1 = \xi_0 : \eta_0 : \zeta_0$ woraus folgt, daß die Flächennormale im Punkt $Q(x, y, z)$ der Mittelfläche parallel läuft der Verbindungsgeraden des Ursprungs mit dem Punkt $P_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ der adjungierten Minimalfläche M_0 [s. Fig. 9]. Da nun PQ auf OP_0 und damit auf der Normalen im Punkt Q der Mittelfläche senkrecht steht, so berührt PQ nicht bloß die Minimalfläche M im Punkt P , sondern auch die Mittelfläche im Punkt Q . Heißt man die Gesamtheit aller Strahlen PQ kurz das Strahlensystem (PQ) , so sieht man, daß die beiden Brennflächenmäntel des Systems (PQ) die Minimalfläche M und die Mittelfläche sind.

Aus (1) ergibt sich noch

$$(2) \quad A_1^2 = -F_0^2 (\Sigma \xi_0 X)^2 \Sigma \xi_0^2.$$

Wir berechnen weiter die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung D_1, D_1', D_1'' , der Mittelfläche. Setzt man zur Abkürzung

$$(3) \quad M = -\frac{i F_0 \Sigma \xi_0 X}{A_1},$$

so ist nach (1)

$$a_1 = M \xi_0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial u} = M \frac{\partial \xi_0}{\partial u} + \xi_0 \frac{\partial M}{\partial u}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial v} = M \frac{\partial \xi_0}{\partial v} + \xi_0 \frac{\partial M}{\partial v}.$$

¹⁾ In diesen Gleichungen ist $\epsilon = -1$ zu setzen, da X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen der überall negativ gekrümmten Minimalfläche M bedeuten. Ubrigens rechnet man aus § 26, (1) leicht direkt

nach, daß $\frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial u} = -i F_0 X$ usw. ist.

Mit Hilfe von II. § 2, (13), § 26 (19) und den letzten Gleichungen folgt

$$\begin{aligned}
 -D_1 &= M \sum \frac{\partial \xi_0}{\partial u} \left(\zeta_0 \frac{\partial Y}{\partial u} - \eta_0 \frac{\partial Z}{\partial u} \right) = M \sum \xi_0 \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial u} \right), \\
 (4) \quad -D_1' &= M \sum \frac{\partial \xi_0}{\partial u} \left(\zeta_0 \frac{\partial Y}{\partial v} - \eta_0 \frac{\partial Z}{\partial v} \right) = M \sum \xi_0 \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} \right), \\
 -D_1'' &= M \sum \frac{\partial \xi_0}{\partial v} \left(\zeta_0 \frac{\partial Y}{\partial v} - \eta_0 \frac{\partial Z}{\partial v} \right) = M \sum \xi_0 \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial v} \right).
 \end{aligned}$$

Man rechnet nun leicht nach, daß

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial \eta_0}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial u} = -X \cdot F(u), \\
 (5) \quad &\frac{\partial \eta_0}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} = 0, \\
 &\frac{\partial \eta_0}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial v} = -X \cdot \Phi(v)
 \end{aligned}$$

ist, wobei $F(u)$, $\Phi(v)$, die in den Formeln von Weierstraß § 4, (10) gebrauchten Funktionen sind. Zwei zu (5) analoge Systeme erhält man durch zyklische Vertauschung der Koordinaten. Aus (4) und (5) folgt jetzt

$$(6) \quad D_1 = M \cdot F(u) \sum \xi_0 X, \quad D_1' = 0, \quad D_1'' = M \cdot \Phi(v) \sum \xi_0 X.$$

Nach II. § 3, (7) erhält man als Differentialgleichung der Asymptotenlinien der Mittelfläche

$$(7) \quad F(u) du^2 + \Phi(v) dv^2 = 0.$$

Dies ist aber nach § 4, (18) zugleich die Differentialgleichung der Asymptotenlinien der Minimalfläche M . Man hat daher den

Satz (von Ribaucour¹⁾). Den Asymptotenlinien der Mittelfläche jedes isotropen Strahlensystems entsprechen die Asymptotenlinien derjenigen Minimalfläche, welche die Mittelenveloppe des Systems ist. Man erhält daher die Asymptotenlinien der Mittelfläche jedes isotropen Strahlensystems durch Quadratur.

¹⁾ A. a. O.

Das oben betrachtete Strahlensystem (PQ) ist nun ein solches, für das die Asymptotenlinien der Brennflächenmäntel einander entsprechen. Solche Strahlensysteme nennt man W -Strahlensysteme (vgl. § 29) in Analogie mit dem Falle der Normalensysteme dieser Art (vgl. § 2 Satz 1), wo die Orthogonalflächen W -Flächen sind. Man kann also sagen: das System (PQ) ist ein W -System.

Wir berechnen endlich nach II. § 3, (15) das Krümmungsmaß k_1 für den Punkt Q der Mittelfläche:

$$IX. 1936 \quad k_1 = \frac{M^2 F(u) \Phi(v) (\sum \xi_0 X)^2}{A_1^2} = - \frac{F_0^2 F(u) \Phi(v) (\sum \xi_0 X)^4}{A_1^4},$$

oder nach (2)

$$(8) \quad k_1 = - \frac{F(u) \Phi(v)}{F_0^2 (\sum \xi_0^2)^2}.$$

Beachtet man, daß nach § 4, (16) und (20) das Krümmungsmaß k im Punkt P der Minimalfläche M sich aus

$$k = - \frac{F_0^2}{F(u) \cdot \Phi(v)}$$

ergibt, und daß $(\sum \xi_0^2)^2$ die vierte Potenz des Abstandes r des Punktes P_0 der adjungierten Minimalfläche vom Ursprung O bedeutet, so folgt die merkwürdige Gleichung

$$(9) \quad k \cdot k_1 = \frac{1}{r^4}.$$

Diese Gleichung ist das Analogon des Halphenschen Satzes (§ 2, Satz 2) für die Zentramäntel einer W -Fläche. Es gilt überhaupt für jedes W -System (wegen des Beweises vgl. § 29) der

Satz. Bei jedem W -Strahlensystem ist das Produkt der Krümmungsmaße der beiden Brennflächenmäntel in zwei entsprechenden Punkten gleich dem reziproken Wert der vierten Potenz der Entfernung der Grenzpunkte.

Nach diesem Satz sieht man, daß in dem W -System (PQ) die Entfernung der Grenzpunkte $r = OP_0$ ist, wie man übrigens leicht auch mit Hilfe der Formeln der letzten Paragraphen direkt beweist.

§ 28. Formeln für die beiden Brennflächen eines allgemeinen Strahlensystems.

Wir kehren nunmehr zu den in § 25 definierten Brennflächen eines allgemeinen Strahlensystems zurück und wollen für diese die sechs Fundamentalgrößen berechnen. Wir werden so zu neuen wichtigen Klassen von Strahlensystemen gelangen.

Als Leitfläche des Strahlensystems wählen wir die Mittelfläche und als Parameterlinien u, v die Kurven, längs deren konsekutive Systemstrahlen sich schneiden. Die Strahlen längs einer der Kurven $v = \text{konst.}$ bilden dann eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante (Brennlinie) auf dem ersten Brennflächenmantel B_1 liegt (s. Fig. 8). Analog erzeugen die Strahlen längs einer der Kurven $u = \text{konst.}$ eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante auf B_2 liegt. Ist ϱ die Abszisse des ersten Brennpunkts, der also auf B_1 liegt, so erhält man als Gleichungen der beiden Brennflächen

$$(1) \quad x_1 = x + \varrho X, \quad y_1 = y + \varrho Y, \quad z_1 = z + \varrho Z,$$

$$(2) \quad x_2 = x - \varrho X, \quad y_2 = y - \varrho Y, \quad z_2 = z - \varrho Z.$$

Dabei bedeuten (x, y, z) die Koordinaten des Mittelpunkts, (x_1, y_1, z_1) die Koordinaten des ersten, (x_2, y_2, z_2) die des zweiten Brennpunkts für den Strahl (u, v) . Nach § 21, (6) haben wir für das Linienelement des sphärischen Bildes des Strahlensystems

$$ds_0^2 = \Sigma dX^2 = E_0 du^2 + 2F_0 du dv + G_0 dv^2$$

und für den Winkel Ω der Parameterkurven auf der Bildkugel, der nach § 25 Satz 6 gleich dem Winkel der Brennebenen ist, nach Rk. u. Fl. II. § 1, (20)

$$(3) \quad \cos \Omega = \frac{F_0}{\sqrt{E_0 G_0}}, \quad \sin \Omega = \frac{\sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}}{\sqrt{E_0 G_0}} = \frac{\Delta_0}{\sqrt{E_0 G_0}}.$$

Ehe wir nun zur Bildung der sechs etwa auf B_1 bezüglichen Fundamentalgrößen schreiten, müssen wir zuerst die Bedingung ausdrücken, daß die Strahlen längs der Kurven $u = \text{konst.}, v = \text{konst.}$ je eine abwickelbare Fläche

bilden. Zu diesem Zwecke beachte man, daß der Strahl (u, v) mit den Richtungskosinus (X, Y, Z) die Brennpunktlinie $v = \text{konst.}$ im Punkt (x_1, y_1, z_1) von B_1 berührt und demnach die Richtungskosinus X, Y, Z mit $\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial y_1}{\partial u}, \frac{\partial z_1}{\partial u}$ proportional sein müssen. Es ist daher

$$(4) \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + \varrho \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{X \partial \varrho}{\partial u} = \lambda X,$$

$$(5) \quad \frac{\partial x_2}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} - \varrho \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{X \partial \varrho}{\partial v} = \mu X,$$

wobei (5) ausdrückt, daß der Strahl (u, v) die Brennpunktlinie $u = \text{konst.}$ von B_2 berührt; λ und μ sind Proportionalitätsfaktoren. Für y und z gelten die entsprechenden Gleichungen. Um die Größen λ, μ, ϱ zu bestimmen, setze man die beiden aus (4) und (5) sich ergebenden Werte von $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ einander gleich. Es ist nun

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \varrho}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial \varrho}{\partial u} + \varrho \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + X \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} = \lambda \frac{\partial X}{\partial v} + X \frac{\partial \lambda}{\partial v} \\ - & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \varrho}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial \varrho}{\partial v} + \varrho \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + X \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} = -\mu \frac{\partial X}{\partial u} - X \frac{\partial \mu}{\partial u}. \end{aligned}$$

Addiert man diese beiden Gleichungen und beachtet, daß für die Bildkugel nach II. § 4, (18)

$$(6) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = p'_0 \frac{\partial X}{\partial u} + q'_0 \frac{\partial X}{\partial v} - F_0 X$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} (7) \quad & \frac{\partial X}{\partial v} \left(\lambda - 2 \frac{\partial \varrho}{\partial u} \right) - \frac{\partial X}{\partial u} \left(\mu + 2 \frac{\partial \varrho}{\partial v} \right) + X \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial u} - 2 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} \right) \\ & = 2 \varrho \left(p'_0 \frac{\partial X}{\partial u} + q'_0 \frac{\partial X}{\partial v} - F_0 X \right). \end{aligned}$$

Multipliziert man (7) zuerst mit $\frac{\partial X}{\partial u}$, dann mit $\frac{\partial X}{\partial v}$

und endlich mit X und addiert die analogen Gleichungen in Y und Z in allen drei Fällen, so folgt

$$\begin{aligned}
 F_0 \left(\lambda - 2 \frac{\partial \varrho}{\partial u} \right) - E_0 \left(\mu + 2 \frac{\partial \varrho}{\partial v} \right) &= 2\varrho (p'_0 E_0 + q'_0 F_0), \\
 (8) \quad G_0 \left(\lambda - 2 \frac{\partial \varrho}{\partial u} \right) - F_0 \left(\mu + 2 \frac{\partial \varrho}{\partial v} \right) &= 2\varrho (p'_0 F_0 + q'_0 G_0), \\
 \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial u} - 2 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} + 2\varrho F_0 &= 0.
 \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich

$$(9) \quad \lambda = 2\varrho q'_0 + 2 \frac{\partial \varrho}{\partial u}, \quad \mu = -2\varrho p'_0 - 2 \frac{\partial \varrho}{\partial v},$$

und wenn man diese Werte für λ und μ in die letzte Gleichung (8) einführt.

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} + p'_0 \frac{\partial \varrho}{\partial u} + q'_0 \frac{\partial \varrho}{\partial v} + \varrho \left\{ \frac{\partial p'_0}{\partial u} + \frac{\partial q'_0}{\partial v} + F_0 \right\} = 0.$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für ϱ .

Endlich folgt aus (4), (5) und (9)

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \frac{\partial x}{\partial u} &= X \left\{ 2\varrho q'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial u} \right\} - \varrho \frac{\partial X}{\partial u}, \\
 -\frac{\partial x}{\partial v} &= X \left\{ 2\varrho p'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial v} \right\} - \varrho \frac{\partial X}{\partial v}.
 \end{aligned}$$

Diese Entwicklungen verdankt man Guichard.¹⁾ Die Guichardschen Gleichungen (10) und (11) geben die Lösung der Aufgabe, bei gegebenem sphärischem Bilde der abwickelbaren Flächen die zugehörigen Strahlensysteme zu bestimmen. Denn sind X, Y, Z gegebene Funktionen von u, v , so hat man aus (10) die allgemeinste Lösung für ϱ zu entnehmen, worauf aus (11) die Koordinaten x, y, z der Mittelfläche sich durch Quadratur ergeben; die Gleichungen (11) sind nämlich integrierbar, da aus dem Gang der Entwicklungen erhellt, daß die Gleichung (10) die Integrabilitätsbedingung für das System (11) ist.

¹⁾ Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables (Annal. Scientif. de l'Ec. Norm. Supér., t. VI, 3e série).

Aus (1) erhält man nun

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} + \varrho \frac{\partial X}{\partial v} + X \frac{\partial \varrho}{\partial v}.$$

In diese Gleichung und in (4) setze man aus (11) die Werte von $\frac{\partial x}{\partial u}$ und $\frac{\partial x}{\partial v}$ ein und erhält

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= 2X \left(\varrho q'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= 2\varrho \left(-p'_0 X + \frac{\partial X}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Aus (12) lassen sich die Fundamentalgrößen E_1 , F_1 , G_1 für den ersten Brennflächenmantel B_1 berechnen. Man erhält

$$(13) \quad \begin{aligned} E_1 &= 4 \left(\varrho q'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial u} \right)^2, \quad F_1 = -4\varrho p'_0 \left(\varrho q'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial u} \right), \\ G_1 &= 4\varrho^2 (p_0'^2 + G_0), \quad \Delta_1^2 = E_1 G_1 - F_1^2 = 16\varrho^2 G_0 \left(\varrho q'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial u} \right)^2. \end{aligned}$$

Aus (1), (2), (4) und (5) folgt, daß man die Fundamentalgrößen E_2 , F_2 , G_2 für B_2 dadurch erhält, daß man u mit v vertauscht und $-\varrho$ statt ϱ setzt. Es ist so nach II. § 2, Anm. S. 18

$$(14) \quad \begin{aligned} E_2 &= 4\varrho^2 (q_0'^2 + E_0), \quad F_2 = -4\varrho q'_0 \left(\varrho p'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial v} \right), \\ G_2 &= 4 \left(\varrho p'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial v} \right)^2, \quad \Delta_2^2 = E_2 G_2 - F_2^2 = 16\varrho^2 E_0 \left(\varrho p'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial v} \right)^2. \end{aligned}$$

Um auch die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung für den Brennflächenmantel B_1 aufzustellen, haben wir nach II. § 2, 13 zunächst die Richtungskosinus a_1 , b_1 , c_1 für die Normale der Fläche B_1 im Punkte (u, v) zu bilden. Diese ist nach § 25, Satz 3, parallel der Binormalen der Kurve $u = \text{konst.}$ von B_2 , steht also senkrecht auf zwei konsekutiven Tangenten derselben, d. h. es bestehen die Gleichungen

$$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0,$$

$$a_1 \frac{\partial X}{\partial v} + b_1 \frac{\partial Y}{\partial v} + c_1 \frac{\partial Z}{\partial v} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt nach I. Einl. (16) und 15) und wegen $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$

$$(15) \quad a_1 \sqrt{G_0} = Y \frac{\partial Z}{\partial v} - Z \frac{\partial Y}{\partial v}.$$

Aus (15) ergibt sich durch Ableiten nach u und v

$$\sqrt{G_0} \frac{\partial a_1}{\partial u} + a_1 \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} = \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} + Y \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} - Z \frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v},$$

$$\sqrt{G_0} \frac{\partial a_1}{\partial v} + a_1 \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial v} = Y \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} - Z \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2},$$

oder nach den Gleichungen II. § 4, (8)¹⁾ und II. § 4, (18)

$$(16) \quad \begin{aligned} \sqrt{G_0} \frac{\partial a_1}{\partial u} + a_1 \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} &= \Delta_0 X + p'_0 \left(Y \frac{\partial Z}{\partial u} - Z \frac{\partial Y}{\partial u} \right) \\ &+ q'_0 \left(Y \frac{\partial Z}{\partial v} - Z \frac{\partial Y}{\partial v} \right) \equiv R_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{G_0} \frac{\partial a_1}{\partial v} + a_1 \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial v} &= p''_0 \left(Y \frac{\partial Z}{\partial u} - Z \frac{\partial Y}{\partial u} \right) \\ &+ q''_0 \left(Y \frac{\partial Z}{\partial v} - Z \frac{\partial Y}{\partial v} \right) \equiv R'_x, \end{aligned}$$

wobei wir die rechten Seiten dieser Gleichungen abkürzend mit R_x und R'_x bezeichnet haben.

Die analogen Gleichungen für b_1 und c_1 erhält man aus den letzteren durch cyklische Vertauschung von X , Y , Z . Aus (16) folgt nun

¹⁾ Ob in diesen Gleichungen für a_0 , b_0 , c_0 die Werte $+X$, $+Y$, $+Z$ oder $-X$, $-Y$, $-Z$ zu nehmen sind, kann in diesem Falle nicht entschieden werden. Wir haben überall die ersten Werte genommen; hätten wir das andere Vorzeichen gewählt, so würde das Folgende dennoch keine wesentliche Änderung erfahren haben.

$$(17) \quad \sum R_x X = \Delta_0, \quad \sum R_x \frac{\partial X}{\partial u} = -q'_0 \Delta_0, \quad \sum R_x \frac{\partial X}{\partial v} = p'_0 \Delta_0, \\ \sum R'_x X = 0, \quad \sum R'_x \frac{\partial X}{\partial u} = -q''_0 \Delta_0, \quad \sum R'_x \frac{\partial X}{\partial v} = p''_0 \Delta_0.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichungen sieht man ein, wenn man beachtet, daß identisch

$$\begin{aligned} \sum X \left(Y \frac{\partial Z}{\partial u} - Z \frac{\partial Y}{\partial u} \right) &= \sum X \left(Y \frac{\partial Z}{\partial v} - Z \frac{\partial Y}{\partial v} \right) \\ &= \sum \frac{\partial X}{\partial u} \left(Y \frac{\partial Z}{\partial u} - Z \frac{\partial Y}{\partial u} \right) = \sum \frac{\partial X}{\partial v} \left(Y \frac{\partial Z}{\partial v} - Z \frac{\partial Y}{\partial v} \right) = 0 \end{aligned}$$

ist, da jede Summe sich als Determinante mit zwei gleichen Reihen darstellen läßt. Außerdem ist nach II.

$$\S 2, (10) \quad \sum X \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial u} \right) = \Delta_0. \quad \text{Aus (12) und (16)}$$

folgt nun mit Benutzung von (17)

$$(18) \quad \begin{aligned} \sqrt{G_0} \sum \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= 2 \left(\varrho q'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial u} \right) \sum R_x X = 2 \Delta_0 \left(\varrho q'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial u} \right), \\ \sqrt{G_0} \sum \frac{\partial a_1}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= 2 \left(\varrho q'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial u} \right) \sum R'_x X = 0, \\ \sqrt{G_0} \sum \frac{\partial a_1}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -2 \varrho p'_0 \sum R'_x X + 2 \varrho \sum R'_x \frac{\partial X}{\partial v} = 2 \varrho p''_0 \Delta_0. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der dritten Gleichung formen wir noch etwas um. Aus (3) bilden wir das Differential von $\lg \Omega$ und erhalten

$$d\Omega = \frac{F_0 d\Delta_0 - \Delta_0 dF_0}{E_0 G_0} = \frac{F_0 (E_0 dG_0 - G_0 dE_0) - 2E_0 G_0 dF_0}{2E_0 G_0 \Delta_0}$$

oder

$$(19) \quad -d\Omega = \left(\frac{\Delta_0 q_0}{E_0} + \frac{\Delta_0 p'_0}{G_0} \right) du + \left(\frac{\Delta_0 p''_0}{G_0} + \frac{\Delta_0 q'_0}{E_0} \right) dv.$$

Hieraus folgt mit Benutzung von (3)

$$\frac{\Delta_0 p''_0}{\sqrt{G_0}} = -\sqrt{G_0} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v} + \frac{\Delta_0 q'_0}{E_0} \right) = -\sqrt{G_0} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G_0}{E_0}} q'_0 \sin \Omega \right).$$

Setzt man diesen Wert in die dritte Gleichung (18) ein, so folgt aus (18) nach II. § 2, (13) für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung von B_1

$$(20) \quad \begin{aligned} D_1 &= -2\sqrt{E_0} \sin \Omega \left\{ \varrho q'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial u} \right\}, \\ D'_1 &= 0, \\ D''_1 &= 2\varrho \sqrt{G_0} \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G_0}{E_0}} q'_0 \sin \Omega \right\}. \end{aligned}$$

Vertauscht man wie oben u mit v und zugleich ϱ mit $-\varrho$, so erhält man für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung von B_2

$$(21) \quad \begin{aligned} D_2 &= -2\varrho \sqrt{E_0} \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E_0}{G_0}} p'_0 \sin \Omega \right\}, \\ D'_2 &= 0, \\ D''_2 &= 2\sqrt{G_0} \sin \Omega \left\{ \varrho p'_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial v} \right\}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen $D'_1=0$, $D'_2=0$ drücken nach II. § 3, Satz 1 den in § 25 gefundenen Satz 5. aus, daß die beiden Scharen von abwickelbaren Flächen auf jeder der Brennflächen ein konjugiertes System ausschneiden.

Nach der Formel II. § 3, 15 erhält man endlich mit Hilfe von (20) und (13) bzw. (21) und (14) für das Krümmungsmaß k_1 und k_2 von B_1 und B_2

$$(22) \quad \begin{aligned} k_1 &= - \frac{\sqrt{\frac{E_0}{G_0}} \sin \Omega \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G_0}{E_0}} q'_0 \sin \Omega \right\}}{4\varrho \left\{ \frac{\partial \varrho}{\partial u} + \varrho q'_0 \right\}}, \\ k_2 &= - \frac{\sqrt{\frac{G_0}{E_0}} \sin \Omega \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E_0}{G_0}} p'_0 \sin \Omega \right\}}{4\varrho \left\{ \frac{\partial \varrho}{\partial v} + \varrho p'_0 \right\}}. \end{aligned}$$

§ 29. Die Strahlensysteme von Weingarten und Waelsch.

In § 2, Satz 1 hat sich ergeben, daß für eine W -Fläche den Asymptotenkurven des ersten Zentramantels die Asymptotenkurven auf dem zweiten entsprechen, und umgekehrt, daß, wenn in einem Normalensystem die Asymptotenkurven auf den beiden Brennflächen sich entsprechen, die Orthogonalflächen W -Flächen sind. Der in § 2 abgeleitete Satz von Halphen zeigte, daß zwischen den Krümmungsmaßen der beiden Zentramäntel einer W -Fläche in entsprechenden Punkten eine einfache Beziehung besteht. Eine dem Halphenschen Satz analoge Beziehung für die Krümmungsmaße der beiden Brennflächenmäntel gilt nun, wie Ribaucour¹⁾ zuerst gezeigt, für eine viel allgemeinere Klasse von Strahlensystemen, nämlich für alle die, für welche die Asymptotenkurven der beiden Brennflächenmäntel einander entsprechen.²⁾ Diese Strahlensysteme nennt man Weingartensysteme oder kurz W -Systeme, weil für ein W -Normalensystem die Orthogonalflächen W -Flächen sind.

Die gedachte Beziehung folgt leicht aus den Formeln des § 28; denn sollen sich die Asymptotenkurven auf B_1 und B_2 entsprechen, d. h. soll die Differentialgleichung der Asymptotenlinien für den einen Mantel mit der Differentialgleichung für den andern Mantel bis auf einen von du, dv unabhängigen Faktor identisch sein, so muß

$$(1) \quad D_1 : D_1'' = D_2 : D_2''$$

sein. Aus § 28, (20)—(22) folgt

$$k_1 k_2 = \left(\frac{\sin \Omega}{2 \varrho} \right)^4.$$

Nach § 24, (10) ist aber der Abstand d der Grenzpunkte gegeben durch

$$d = \frac{2 \varrho}{\sin \Omega}$$

¹⁾ Vgl. die § 26 zitierte Arbeit von Ribaucour S. 113.

²⁾ Unter zwei entsprechenden Punkten sind natürlich die Punkte zu verstehen, in denen ein Strahl den einen und den andern Brennflächenmantel berührt oder auch die beiden Punkte, die denselben Werten (u, v) entsprechen.

und man hat daher die Beziehung

$$(2) \quad k_1 k_2 = \frac{1}{d^4}.$$

Diese Gleichung geht für ein Normalensystem unmittelbar in die Gleichung (3) des § 2 über, welche den Halphenschen Satz darstellt (vgl. auch das spezielle *W*-System in § 27).

Man erhält für eine zweite Klasse von Strahlensystemen eine der Gleichung (2) analoge Beziehung, nämlich

$$(3) \quad k_1 k_2 = -\frac{1}{d^4},$$

wenn man statt (1) voraussetzt, daß

$$(4) \quad D_1 : D_1'' = - D_2 : D_2''$$

ist. Diese Strahlensysteme hat Waelsch¹⁾ angegeben. Der Gleichung (4) kann man eine einfache geometrische Deutung geben. Die Differentialgleichung der Asymptotenkurven auf B_1 ist

$$D_1 du^2 + D_1' dv^2 = 0,$$

dieses entspricht nach (4) auf B_2 ein Kurvensystem, dessen Differentialgleichung

$$D_2 du^2 - D_2' dv^2 = 0$$

ist. Nach Rk. u. Fl. II. § 3, (4) schließt man aber, daß dieses Kurvensystem ein konjugiertes von B_2 ist. Die Strahlensysteme von Waelsch sind also dadurch charakterisiert, daß den Asymptotenkurven auf dem einen Brennflächenmantel ein konjugiertes System auf dem andern Mantel entspricht und umgekehrt.

§ 30. Guichardsche Strahlensysteme. Guichardsche und Voß'sche Flächen.

Da die abwickelbaren Flächen jedes Strahlensystems die beiden Brennflächenmäntel nach konjugierten Kurvensystemen schneiden, so liegt es nahe zu untersuchen, bei welchen Strahlensystemen die abwickelbaren

¹⁾ Comptes Rendus de l'Académie, Paris 118, 1894 (736—738).

Flächen beide Brennflächenmäntel nach Krümmungslinien schneiden. Diese speziellen Systeme heißen Guichardsche¹⁾ Strahlensysteme.

In diesem Falle muß

$$F_1 = 0, F_2 = 0$$

sein. Aus § 28, (13) und (14) folgt

$$(1) \quad p'_0 = 0, q'_0 = 0;$$

denn $q q'_0 + \frac{\partial q}{\partial u}$ und ebenso $q p'_0 + \frac{\partial q}{\partial v}$ können nicht verschwinden, da sonst $E_1 = 0, G_2 = 0$ wäre und dann z. B. auf B_1 für die Kurven $v = \text{konst.}$ $ds = 0$ folgen würde. Dies würde bedeuten, daß der Brennflächenmantel B_1 in eine Kurve degeneriert ist. Schließen wir dies also aus, so sieht man, daß die Gleichungen (1) die Guichardschen Systeme charakterisieren. Um diese Gleichungen geometrisch deuten zu können, stellen wir nach Weingarten Gleichungen her, welche die Größen p, q, p', q' usw. einer Fläche mit den für die Bildkugel gebildeten p_0, q_0 usw. verknüpfen. Diese auch sonst nützlichen Beziehungen erhält man dadurch, daß man die Gleichungen Rk. u. Fl. II. § 2, (13) partiell einmal nach u , dann nach v differenziert, die zweiten Differentialquotienten von x, y, z aus II. § 2, (23) und die von X, Y, Z aus II. § 4, (18) durch die entsprechenden Werte ersetzt. Es folgt so

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial u} = p D + q D' + p_0 D + q_0 D', \\ \frac{\partial D}{\partial v} = p' D + q' D' + p'_0 D + q'_0 D'; \\ \frac{\partial D'}{\partial u} = p D' + q D'' + p'_0 D + q'_0 D', \\ \frac{\partial D'}{\partial v} = p' D' + q' D'' + p''_0 D + q''_0 D'; \end{cases}$$

¹⁾ Vgl. Guichard a. a. O.

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial D'}{\partial u} = p'D + q'D' + p_0 D' + q_0 D'', \\ \frac{\partial D'}{\partial v} = p''D + q''D' + p'_0 D' + q'_0 D''; \\ \frac{\partial D''}{\partial u} = p'D' + q'D'' + p'_0 D' + q'_0 D'', \\ \frac{\partial D''}{\partial v} = p''D' + q''D'' + p''_0 D' + q''_0 D''. \end{cases}$$

Wir bemerken nebenbei, daß man hieraus die Mainardischen (Codazzischen) Gleichungen II. § 17, (1), (2) erhält, wenn man von der zweiten Gleichung die dritte und von der siebenten die sechste abzieht. Zieht man anderseits von der zweiten die fünfte und von der siebenten die vierte ab, so erhält man genau dieselben Gleichungen, nur statt den Größen p, q usw. die Größen p_0, q_0 usw. Diese letzteren Gleichungen können zur Bestimmung von D, D', D'' dienen, wenn X, Y, Z als Funktionen von u, v bekannt sind, also die sphärische Abbildung der Fläche gegeben ist.

Wir wollen nun, um zu unserer Aufgabe zurückzu-kehren, die Parameterlinien (u, v) des sphärischen Bilds des Guichardschen Strahlensystems als die Bildkurven der Asymptotenlinien einer gewissen Fläche S ansehen. Daß dies möglich ist, wird sich sogleich ergeben. Für diese Fläche ist also

$$(3) \quad D = 0, \quad D'' = 0$$

und außerdem bestehen die Gleichungen (1). Aus der dritten und sechsten Gleichung (2) folgt jetzt

$$(4) \quad \frac{\partial \log D'}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial \log D'}{\partial v} = q''.$$

Aus (1) und II. § 1, (25) ergibt sich aber

$$(5) \quad \frac{\partial \log \Delta}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial \log \Delta}{\partial v} = q'',$$

wenn man noch beachtet, daß nach der zweiten und siebenten Gleichung (2) wegen (1) und (3) $p' = q' = 0$ ist.

Aus (4) und (5) folgt

$$D' = \alpha \Delta,$$

wo α eine Konstante ist, und für das Krümmungsmaß k der Fläche S nach II. § 18, (11)

$$k = -\alpha^2,$$

d. h. die Fläche S ist eine Fläche von konstantem negativem Krümmungsmaß.

Geht man umgekehrt von einer auf ihre Asymptotenlinien bezogenen pseudosphärischen Fläche ($k = -1$) aus, so erhält man nach II. § 18, (50), sowie II. § 4, (6) und II. § 3, (15), (16)

$$(6) \quad E_0 = 1, \quad F_0 = -\cos 2\omega, \quad G_0 = 1,$$

wobei 2ω der Winkel der Asymptotenkurven der Fläche S ist und nach II. § 18, (51) der partiellen Differentialgleichung

$$(7) \quad \frac{\partial^2 2\omega}{\partial u \partial v} = \sin 2\omega$$

genügt. Aus (6) folgt jetzt umgekehrt (1); man hat daher den

Satz 1. Die Guichardschen Strahlensysteme sind diejenigen, für welche das sphärische Bild der abwickelbaren Flächen mit dem der Asymptotenlinien einer pseudosphärischen Fläche zusammenfällt.

Die Größen (6) sind nun zugleich die Koeffizienten des Linienelements für die sphärische Abbildung des Guichardschen Strahlensystems. Den Winkel Ω der Kugelkurven (u, v) erhält man aus § 28, (3); es folgt $\cos \Omega = -\cos 2\omega$, also

$$(8) \quad \Omega = \pm (\pi - 2\omega).$$

Die partielle Differentialgleichung § 28, (10), der q genügen muß, lautet nun wegen (1) und (6)

$$(9) \quad \frac{\partial^2 q}{\partial u \partial v} = q \cos 2\omega.$$

Die Bestimmung des allgemeinsten Guichardschen Strahlensystems gestaltet sich daher wie folgt: Man beziehe die allgemeinste pseudosphärische Fläche S auf ihre Asymptotenlinien (u, v) und berechne

den Winkel 2ω der Asymptotenkurven sowie die Richtungskosinus X, Y, Z der Flächennormalen im Punkt (u, v) als Funktionen von (u, v) ; die Funktion 2ω wird dabei die Gleichung (7) identisch befriedigen. Hierauf entnehme man aus (9) die allgemeinste Lösung für ϱ und führe diese in die Gleichungen (11) des § 28 ein, worauf sich die Koordinaten x, y, z der Mittelfläche des Guichard-Systems ergeben. Diese Gleichungen lauten wegen (1)

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= X \frac{\partial \varrho}{\partial u} - \varrho \frac{\partial X}{\partial u}, \\ -\frac{\partial x}{\partial v} &= X \frac{\partial \varrho}{\partial v} - \varrho \frac{\partial X}{\partial v}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun jeden Brennflächenmantel eines Guichardschen Strahlensystems eine Guichardsche Fläche nennen. Das Guichardsche Strahlensystem besteht aus den sämtlichen Tangenten der Krümmungslinien $v = \text{konst.}$ der Guichardschen Fläche B_1 (oder der Krümmungslinien $u = \text{konst.}$ von B_2 s. Fig. 8, S. 111). Konstruiert man für B_1 den Zentramantel C_1 bezüglich der Kurven $v = \text{konst.}$ von B_1 , so ist nach II. § 5, S. 39 die Normale im Punkt (u, v) von C_1 mit der Tangente an die Krümmungslinie $v = \text{konst.}$ von B_1 , d. h. mit dem Systemstrahl parallel. Der Zentramantel C_1 und die pseudosphärische Fläche S sind daher durch parallele Normalen aufeinander bezogen. Außerdem folgt aus II. § 5, S. 39, daß die Kurven (u, v) auf C_1 ein konjugiertes System bilden und daß die Kurven $v = \text{konst.}$ geodätische Linien sind. Man kann nun zeigen, daß auch die Kurven $u = \text{konst.}$ auf C_1 geodätische Linien sind. Die Fläche C_1 ist nämlich nach dem Gesagten durch die Gleichungen [vgl. (1)]

$$(11) \quad p'_0 = 0, \quad q'_0 = 0, \quad D' = 0$$

charakterisiert. Aus der dritten und sechsten Gleichung (2) folgt aber für C_1

$$q = 0, \quad p'' = 0.$$

Nun sieht man, daß die Differentialgleichung für die geodätischen Linien II. § 15, (3) erfüllt wird einerseits

durch $dv=0$, $q=0$, andererseits durch $du=0$, $p''=0$, womit das Gesagte bewiesen ist. Die Fläche C_1 besitzt daher ein konjugiertes System, dessen sämtliche Kurven aus geodätischen Linien bestehen, solche Flächen nennt man nach Voß,¹⁾ der diese zuerst untersucht hat, Voßsche Flächen; dieselben sind durch (11) charakterisiert. Man hat so den

Satz 2. Für jede Guichardsche Fläche ist der eine Zentramantel eine Voßsche Fläche.

Umgekehrt sieht man leicht ein, wie man zu einer Voßschen Fläche eine zugehörige Guichardsche erhält; man ziehe z. B. an alle Kurven $v=\text{konst.}$ des geodätisch-konjugierten Systems die Tangenten und suche die Orthogonalflächen dieses Strahlensystems; diese sind dann notwendig Guichardsche Flächen. (Ebenso für die Kurven $u=\text{konst.}$). Daß in der Tat diese Strahlen ein Normalsystem bilden, folgt aus § 25 Schluß. Das übrige ergibt sich leicht aus den oben angegebenen Erörterungen.

Wir wollen nun weiter zeigen, wie man ausgehend von einer Voßschen Fläche, die man als bekannt voraussetzt, unendlich viele Guichardsche Strahlensysteme herstellen kann. Zu diesem Zwecke beachte man, daß die mittlere Gleichung (20) von II. § 4 für eine Voßsche Fläche nach (11) und (6) lautet

$$(12) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} = T \cdot \cos 2\omega.$$

Vergleicht man diese Differentialgleichung mit (9), so sieht man, daß T , d. h. der Abstand des Ursprungs von der Tangentialebene im Punkte (u, v) der Voßschen Fläche ein partikuläres Integral von (9) ist. Da aber nach II. § 2, S. 18 die Fundamentalgrößen unabhängig von der Lage des Koordinatensystems sind, und daher die Gleichungen (11) fortbestehen, auch wenn die Voßsche Fläche auf ein anderes Koordinatensystem bezogen wird, so sieht man, daß der Abstand T eines beliebigen Raumpunkts von der Tangentialebene (u, v) der Voßschen Fläche eine Lösung von (9) gibt. Da nun T als

¹⁾ Vgl. Sitzungsberichte der Münchener Akademie der Wissenschaften, März 1888.

Funktion von u und v bekannt ist, und damit also auch ϱ , so erhält man durch Quadratur aus (10) die Mittelfläche des Guichardschen Strahlensystems, und zwar wie man sieht auf ∞^3 Arten. In jedem dieser Strahlensysteme erhält man als Brennflächenmäntel zwei Guichardsche Flächen und aus diesen zwei Voßsche Flächen, die man nun neuerdings wieder wie die ursprünglich gegebene Voßsche Fläche benützen kann.

Wir beweisen weiter den

Satz 3. Die Mittelfläche jedes Guichardschen Strahlensystems entspricht der zugehörigen pseudosphärischen Fläche S durch Orthogonalität der Elemente.

Sind $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ die Koordinaten des Punktes (u, v) der pseudosphärischen Fläche S , und beachtet man, daß für S

$$\sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u} = -D = 0, \quad \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v} = -D'' = 0,$$

$$\sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} = -D'$$

ist, so sieht man, daß aus (10) folgt

$$(13) \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0,$$

womit nach § 26, (3) der Beweis geliefert ist. Aus dem am Anfang von § 26 Ausgeführten und aus den obigen Resultaten schließt man, daß eine einzige Voßsche Fläche ∞^3 unendlich kleine Verbiegungen der pseudosphärischen Fläche S vermittelt.¹⁾

¹⁾ Mit Hilfe der Gleichungen (11) des § 28 beweist man überhaupt ebenso den allgemeinen Satz (von Guichard)

Haben die abwickelbaren Flächen eines Strahlensystems dasselbesphärische Bild wie die Asymptotenkurven einer Fläche S , so entspricht die Mittelfläche des Strahlensystems der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente (vgl. § 33, Aufg. 30).

Wir beweisen endlich den

Satz 4. (K. Kommerell.) Die Mittelenveloppe jedes Guichardschen Strahlensystems ist eine Voßsche Fläche.

Seien wie oben (x, y, z) die Koordinaten des Punktes (u, v) der Mittelfläche eines Guichardschen Strahlensystems, für das also die Gleichungen (1) gelten, so ist der Abstand T des Ursprungs von der Mittellotebene gegeben durch

$$(14) \quad T = \Sigma X x.$$

Aus (14) folgt nun mit Hilfe von (10)

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial u} &= \Sigma x \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial \varrho}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} &= \Sigma x \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} \end{aligned}$$

oder nach II. § 4, (18) und (1) dieses Paragraphen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} &= -F_0 \Sigma x X + \varrho F_0 + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} \\ &= -F_0 T + \varrho F_0 + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v}. \end{aligned}$$

Da nun ϱ der partiellen Differentialgleichung (9) genügt, so folgt

$$(16) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} + F_0 T = 0.$$

Aus dieser und der mittleren Gleichung (20) von II. § 4 folgt aber

$$D' = 0,$$

welche Gleichung zusammen mit (1) die Gleichungen (11) gibt, welche die Voßschen Flächen charakterisieren.

Wie man sieht, erinnert dieser Satz an den Ribaucourschen bezüglich der isotropen Systeme (vgl. § 26). Errichtet man nun im ersten Brennpunkt, im Mittelpunkt und im zweiten Brennpunkt jedes Strahls eines Guichardschen Strahlensystems je die Ebene normal zum Strahl, so umhüllen diese drei Ebenen drei

Voßsche Flächen. (Die Ebenen z. B. in den ersten Brennpunkten umhüllen den Zentrantel von B_1 bezüglich der Krümmungslinien $v = \text{konst.}$, d. h. eine Voßsche Fläche.) Man beweist überhaupt allgemeiner den

Satz 5. (K. Kommerell.) Teilt man in einem Guichardschen Strahlensystem für jeden Strahl die Brennpunktsdistanz in einem bestimmten konstanten Verhältnis und konstruiert man in jedem Teilpunkt die Ebene senkrecht zum Strahl, so ist die Enveloppe dieser Ebenen eine Voßsche Fläche.

Denn ist T_1 bzw. T_2 der Abstand des Ursprungs von der Ebene senkrecht zum Strahl im ersten bzw. zweiten Brennpunkt, T der Abstand von der durch den Teilpunkt gehenden Ebene, so hat man

$$T = \frac{T_1 + \lambda T_2}{1 + \lambda}$$

und, da T_1 und T_2 partikuläre Integrale von (16) sind, so ist auch T ein Integral dieser Gleichung, womit der Beweis erledigt ist.

§ 31. Die pseudosphärischen Strahlensysteme.

Wir betrachten nun weiter solche spezielle Strahlensysteme, für welche der Abstand der Brennpunkte und der Abstand der Grenzpunkte je konstanten Wert besitzen. Diese Systeme heißen pseudosphärische, weil der Satz gilt

Satz 1. Die beiden Brennflächen eines pseudosphärischen Strahlensystems sind pseudosphärische Flächen, deren Krümmungsmaß gleich dem negativen reziproken Quadrat des Abstands der Grenzpunkte ist.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Formeln (22) des § 28. Denn da d und δ konstant ist, so ist nach § 24, (10) auch Ω konstant und es ergibt sich

$$k_1 = k_2 = -\frac{\sin^2 \Omega}{4\varrho^2}.$$

Nach § 24, (10) ist aber, da $2\varrho = \delta$ ist,

$$\frac{\sin \Omega}{2\varrho} = \frac{1}{d},$$

also

$$(1) \quad k_1 = k_2 = -\frac{1}{d^2}.$$

Wir bilden weiter mit Hilfe der Formeln § 28, (13), (14), (20), (21) die Differentialgleichung der Krümmungslinien und Asymptotenlinien für die beiden Mäntel B_1 und B_2 des Strahlensystems und erhalten für die Krümmungslinien auf B_1 und B_2 die gemeinsame Gleichung

$$(2) \quad E_0 p'_0 q'_0 du^2 - \{E_0 p_0'^2 + E_0 G_0 + G_0 q_0'^2\} du dv + G_0 p_0 q_0' dv^2 = 0;$$

ebenso erhält man für die Asymptotenlinien für beide Brennflächen

$$(3) \quad E_0 du^2 - G_0 dv^2 = 0.$$

Für die Linienelemente ds_1 und ds_2 der Brennflächen ergibt sich

$$(4) \quad \begin{aligned} ds_1^2 &= 4\varrho^2 \{ (q'_0 du - p'_0 dv)^2 + G_0 dv^2 \}, \\ ds_2^2 &= 4\varrho^2 \{ (q'_0 du - p'_0 dv)^2 + E_0 du^2 \}, \end{aligned}$$

und man sieht, daß für die Asymptotenlinien nach (3) $ds_1 = ds_2$ wird. Man hat daher den

Satz 2. Auf den beiden Brennflächen eines pseudosphärischen Strahlensystems entsprechen sich die Krümmungslinien und ebenso die Asymptotenkurven, und es sind überdies entsprechende Bogen der letzteren einander gleich. Die pseudosphärischen Strahlensysteme sind also *W*-Systeme (vgl. § 29).

Nach § 25, Satz 4 folgt endlich

Satz 3. Die Brennnlinien auf den Brennflächen eines pseudosphärischen Strahlensystems sind Kurven, deren Schmiegungeebene mit der Tangentialebene den konstanten Winkel Ω bildet.

Ist insbesondere $\Omega = \frac{\pi}{2}$, so sind die Brennnlinien geodätische Linien und es liegt nach § 25, Schluß ein Normalensystem vor. Für die Orthogonalflächen dieses

ist der Abstand der beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte konst. $= d$, d. h. gleich dem Abstand der Grenzpunkte. Die Orthogonalflächen sind daher lauter W -Flächen mit der Gleichung

$$(5) \quad R_1 - R_2 = d,$$

und das spezielle pseudosphärische Strahlensystem besteht aus den Normalen dieser W -Flächen.

§ 32. Bäcklundsche Transformation für die pseudosphärischen Flächen.

Im vorigen Paragraphen hat sich ergeben, daß die Brennflächen eines pseudosphärischen Strahlensystems konstantes negatives Krümmungsmaß besitzen. Da jeder Systemstrahl beide Flächen berührt, so muß es umgekehrt möglich sein, aus einer gegebenen Fläche von konstantem negativem Krümmungsmaß eine zweite derartige dadurch herzuleiten, daß man in jedem Punkt der Fläche in geeigneter Richtung eine Tangente zieht und auf dieser ein konstantes Stück abträgt. Diese Transformation, die die Ableitung neuer pseudosphärischer Flächen ermöglicht, heißt nach Bäcklund,¹⁾ der sich zuerst eingehend damit beschäftigt hat, die Bäcklundsche Transformation.

Sind x, y, z die Koordinaten eines Punkts P der gegebenen pseudosphärischen Fläche B , deren Krümmungsmaß wir der Einfachheit halber $= -1$ setzen, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Richtungskosinus der Hauptkrümmungsrichtungen in P und bedeutet ϑ den Winkel, den eine durch P gehende Flächentangente mit der Richtung $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ macht, so sind die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= x + \delta (\alpha_1 \cos \vartheta + \alpha_2 \sin \vartheta), \\ y_1 &= y + \delta (\beta_1 \cos \vartheta + \beta_2 \sin \vartheta), \\ z_1 &= z + \delta (\gamma_1 \cos \vartheta + \gamma_2 \sin \vartheta) \end{aligned}$$

der analytische Ausdruck einer solchen Transformation. In der Tat stellen diese Gleichungen, wenn ϑ eine Funktion von u, v und δ ein variabler Parameter ist, ein Strahlensystem dar.

¹⁾ A. Bäcklund, Lunds Universitets Årsskrift 19 (1882—83) p. 7.

Wir haben nun in (1) ϑ als Funktion von u, v so zu bestimmen, daß das Strahlensystem ein pseudosphärisches ist. Zu diesem Zweck ist erforderlich, daß für ein konstantes δ der zweite Brennpunkt P_1 mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 eine pseudosphärische Fläche B_1 beschreibt, wenn der erste Brennpunkt P mit den Koordinaten x, y, z die gegebene Fläche B durchläuft. Da das Krümmungsmaß von $B = -1$ gesetzt ist, so ist nach § 31, (1) $d = 1$ und nach § 24, (10)

$$(2) \quad \delta = \sin \Omega,$$

wo Ω den Winkel der Brennebenen bedeutet.

Wir nehmen nun an, daß die Fläche B auf ihre Asymptotenlinien als Parameterkurven bezogen sei. Es ist also nach Rk. u. Fl. II. § 18, (50) und (51)

$$(3) \quad E = 1, F = \cos 2\omega, G = 1, A = \sin 2\omega;$$

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos 2\omega du dv + dv^2;$$

$$(4) \quad D = 0, D' = \sin 2\omega, D'' = 0;$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 2\omega}{\partial u \partial v} = \sin 2\omega.$$

Dabei bedeutet 2ω den Winkel der Asymptotenlinien; er genügt als Funktion von u, v der Gleichung (5). Die Differentialgleichung der Krümmungslinien lautet nach II. § 3, (11a)

$$(6) \quad du^2 - dv^2 = 0.$$

Es sind also $u - v = \text{konst.}$ und $u + v = \text{konst.}$ die Gleichungen der Krümmungslinien. Die Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ mögen der Schar $u - v = \text{konst.}$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ der Schar $u + v = \text{konst.}$ zugehören. Es ist dann nach (3) und II. § 1, (13)

$$(7) \quad \alpha_1 = \frac{\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial u}}{2 \cos \omega}, \quad \alpha_2 = \frac{\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}}{2 \sin \omega};$$

analoge Gleichungen gelten für $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$. Wir berechnen nun noch die Ableitungen von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ nach u und v . Zu diesem Zwecke lösen wir (7) auf nach

$$\frac{\partial x}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial x}{\partial v} \text{ und erhalten}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \alpha_1 \cos \omega - \alpha_2 \sin \omega, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \alpha_1 \cos \omega + \alpha_2 \sin \omega. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen differenzieren wir nach u und v und entnehmen aus II. § 2, (23) die Werte für $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$. Die Gleichungen II. § 2, (23) lauten nach (3)

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= 2 \operatorname{ctg} 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{2}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= a \sin 2\omega, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= 2 \operatorname{ctg} 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{2}{\sin 2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \end{aligned}$$

oder, wenn man aus (8) in (9) die Werte für $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ einsetzt,

$$(9a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= -2 \frac{\partial \omega}{\partial u} (a_1 \sin \omega + a_2 \cos \omega), \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= a \sin 2\omega, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= -2 \frac{\partial \omega}{\partial v} (a_1 \sin \omega - a_2 \cos \omega). \end{aligned}$$

Trägt man diese Werte in die nach u und v differenzierten Gleichungen (8) ein und löst nach $\frac{\partial \alpha_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \alpha_2}{\partial u}$ usw. auf, so folgt

$$(10) \quad \begin{aligned} -\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} &= \alpha_2 \frac{\partial \omega}{\partial u} - a \sin \omega, & \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} &= \alpha_2 \frac{\partial \omega}{\partial v} + a \sin \omega, \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} &= \alpha_1 \frac{\partial \omega}{\partial u} + a \cos \omega, & -\frac{\partial \alpha_2}{\partial v} &= \alpha_1 \frac{\partial \omega}{\partial v} + a \cos \omega. \end{aligned}$$

Nunmehr bilden wir aus (1) die Fundamentalgrößen erster Ordnung E_1 , F_1 , G_1 für B_1 . Da nach (3) für $v = \text{konst.}$ $ds = du$ und für $u = \text{konst.}$ $ds = dv$ wird, so

bedeuten die Parameter u, v für B die Bogen der Asymptotenkurven. Nach § 31, Satz 2 müssen demnach, wenn das Strahlensystem (1) ein pseudosphärisches sein soll, auch für B_1 die Kurven $u = \text{konst.}, v = \text{konst.}$ die Asymptotenlinien und u, v die Bogen derselben sein. Es muß also notwendig $E_1 = G_1 = 1$ sein. Wir werden sehen, daß diese Bedingungen hinreichend sind für die Bestimmung der Funktion ϑ und daß in der Tat B_1 dann eine pseudosphärische Fläche ist.

Zur Bildung der Fundamentalgrößen E_1, F_1, G_1 differenzieren wir die Gleichungen (1) nach u und v und ersetzen die Ableitungen von x, α_1, α_2 usw. durch die aus den Gleichungen (8) und (10) sich ergebenden Werte. Man erhält so nach leichter Rechnung:

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} = & \left\{ \cos \omega - \delta \sin \vartheta \frac{\partial (\vartheta - \omega)}{\partial u} \right\} \alpha_1 + \left\{ -\sin \omega + \delta \cos \vartheta \frac{\partial (\vartheta - \omega)}{\partial u} \right\} \alpha_2 \\ & + a \delta \sin (\vartheta + \omega), \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = & \left\{ \cos \omega - \delta \sin \vartheta \frac{\partial (\vartheta + \omega)}{\partial v} \right\} \alpha_1 + \left\{ \sin \omega + \delta \cos \vartheta \frac{\partial (\vartheta + \omega)}{\partial v} \right\} \alpha_2 \\ & - a \delta \sin (\vartheta - \omega). \end{aligned}$$

Aus (11) ergibt sich, da $\Sigma \alpha_1 \alpha_2 = \Sigma a \alpha_1 = \Sigma a \alpha_2 = 0$ ist,

$$(12) \quad E_1 = 1 - 2\delta \sin (\vartheta + \omega) \frac{\partial (\vartheta - \omega)}{\partial u} + \delta^2 \left\{ \left[\frac{\partial (\vartheta - \omega)}{\partial u} \right]^2 + \sin^2 (\vartheta + \omega) \right\},$$

$$(13) \quad \begin{aligned} F_1 = & \cos 2\omega - \delta \left\{ \sin (\vartheta + \omega) \frac{\partial (\vartheta + \omega)}{\partial v} + \sin (\vartheta - \omega) \frac{\partial (\vartheta - \omega)}{\partial u} \right\} \\ & + \delta^2 \left\{ \frac{\partial (\vartheta - \omega)}{\partial u} \frac{\partial (\vartheta + \omega)}{\partial v} - \sin (\vartheta - \omega) \sin (\vartheta + \omega) \right\}, \end{aligned}$$

$$(14) \quad G_1 = 1 - 2\delta \sin (\vartheta - \omega) \frac{\partial (\vartheta + \omega)}{\partial v} + \delta^2 \left\{ \left[\frac{\partial (\vartheta + \omega)}{\partial v} \right]^2 + \sin^2 (\vartheta - \omega) \right\}.$$

Soll nun $E_1 = G_1 = 1$ sein, so folgt aus (12) und (14)

$$2 \sin (\vartheta + \omega) \frac{\partial (\vartheta - \omega)}{\partial u} - \delta \left\{ \left[\frac{\partial (\vartheta - \omega)}{\partial u} \right]^2 + \sin^2 (\vartheta + \omega) \right\} = 0,$$

$$2 \sin (\vartheta - \omega) \frac{\partial (\vartheta + \omega)}{\partial v} - \delta \left\{ \left[\frac{\partial (\vartheta + \omega)}{\partial v} \right]^2 + \sin^2 (\vartheta - \omega) \right\} = 0.$$

Wir erhalten also je eine quadratische Gleichung für $\frac{\partial (\vartheta - \omega)}{\partial u}$ und $\frac{\partial (\vartheta + \omega)}{\partial v}$. Die Auflösung derselben ergibt unter Benutzung von (2)

$$(15) \quad \frac{\partial (\vartheta - \omega)}{\partial u} = \frac{1 \pm \cos \Omega}{\sin \Omega} \sin (\vartheta + \omega),$$

$$(16) \quad \frac{\partial (\vartheta + \omega)}{\partial v} = \frac{1 \pm \cos \Omega}{\sin \Omega} \sin (\vartheta - \omega).$$

Um zu entscheiden, mit welchem Vorzeichen $\cos \Omega$ in (15) und (16) zu versehen ist, differenziere man (15) nach v , (16) nach u und subtrahiere. Man erhält so

$$\frac{\partial^2 2\omega}{\partial u \partial v} = \frac{(1 \pm \cos \Omega) (1 \pm \cos \Omega)}{\sin^2 \Omega} \sin 2\omega.$$

Aus (5) folgt nun, daß man in (15) und (16) entgegengesetzte Vorzeichen zu setzen hat, also entweder in (15) $+$, in (16) $-$, oder umgekehrt. Im ersten Falle haben wir

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial (\vartheta - \omega)}{\partial u} &= \operatorname{ctg} \frac{\Omega}{2} \sin (\vartheta + \omega), \\ \frac{\partial (\vartheta + \omega)}{\partial v} &= \operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} \sin (\vartheta - \omega). \end{aligned}$$

Der zweite Fall folgt hieraus, wenn $\pi - \Omega$ für Ω gesetzt wird, was offenbar gestattet ist, da Ω entweder den spitzen oder den stumpfen Winkel zwischen den Brennebenen bedeutet. Den Gleichungen (17) hat ϑ als Funktion von u, v zu genügen: dieselben sind integrabel, da (5) die Integrabilitätsbedingung ist. Wir müssen jetzt noch zeigen, daß die transformierte Fläche B_1 , die durch die Gleichungen (1) dargestellt ist, auch wirklich eine pseudosphärische ist. Zu diesem Zwecke setzen wir die Werte von $\frac{\partial (\vartheta - \omega)}{\partial u}$ und $\frac{\partial (\vartheta + \omega)}{\partial v}$ aus (17) in (13) ein: wir erhalten

so, wenn noch beachtet wird, daß nach dem Obigen $E = G = 1$ ist:

$$(18) \quad E_1 = 1, \quad F_1 = \cos 2\vartheta, \quad G_1 = 1.$$

Differenziert man weiter die erste Gleichung (17) nach v , die zweite nach u und addiert, so folgt

$$(19) \quad \frac{\partial^2 2\vartheta}{\partial u \partial v} = \sin 2\vartheta.$$

Bildet man endlich für das Linienelement

$$ds^2 = du^2 + 2\cos 2\vartheta du dv + dv^2$$

nach II. § 13, (10) das Krümmungsmaß k_1 für B_1 , so folgt mit Rücksicht auf (19) in der Tat

$$(20) \quad k_1 = -1.$$

Man beweist nun nachträglich leicht, daß die Kurven $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ auch auf B_1 , die Asymptotenlinien sind, sowie, daß die Verbindungsgerade entsprechender Punkte von B und B_1 nicht bloß B sondern auch B_1 berührt.

Aus (18) und (19) ist ersichtlich, daß 2ϑ für die transformierte Fläche B_1 dieselbe Bedeutung hat wie 2ω für die Ausgangsfläche B ; 2ϑ ist also der Winkel der Asymptotenlinien der transformierten Fläche.

Wir schließen noch einige Bemerkungen über die Integration von (17) an. Statt (17) kann man nämlich auch

$$(21) \quad d\vartheta = \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\Omega}{2} \sin(\vartheta + \omega) + \frac{\partial \omega}{\partial u} \right\} du + \left\{ \operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} \sin(\vartheta - \omega) - \frac{\partial \omega}{\partial v} \right\} dv$$

schreiben. Führt man hier $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = w$ als neue Variable ein, so geht (21) in eine Differentialgleichung vom Riccatischen Typus

$$(22) \quad dw = (Aw^2 + Bw + C)du + (A_1w^2 + B_1w + C_1)dv$$

über, wo $A, B, C; A_1, B_1, C_1$ gegebene Funktionen von u, v sind. Nach den Sätzen über Riccatische Differential-

gleichungen¹⁾ genügt aber die Kenntnis eines partikulären Integrals von (22), um das allgemeine Integral von (22) und darum von (17) bloß durch Quadraturen zu ermitteln. Es folgt so der

Satz. Kennt man zu der Ausgangsfläche B nur eine abgeleitete B_1 , so lassen sich alle anderen abgeleiteten (zu demselben Ω gehörigen) lediglich durch Quadraturen ermitteln.

Zusatz. Auch die abgeleiteten aller abgeleiteten Flächen bestimmen sich bloß durch Quadraturen. Denn ist B_1 eine abgeleitete von B , so ist auch B für B_1 (diese als Ausgangsfläche betrachtet) eine abgeleitete von B_1 und bekannt. Man kennt also für B_1 eine abgeleitete Fläche.

Setzt man in (17) $\Omega = \frac{\pi}{2}$ oder nach (2) $\delta = 1$, so erhält man eine spezielle Bäcklundsche Transformation. Die Gleichungen für ϑ lauten dann einfach

$$(23) \quad \frac{\partial(\vartheta - \omega)}{\partial u} = \sin(\vartheta + \omega), \quad \frac{\partial(\vartheta + \omega)}{\partial v} = \sin(\vartheta - \omega).$$

Da die Brennebenen des Strahlensystems aufeinander senkrecht stehen, so folgt aus § 25, S. 112, daß das pseudosphärische Strahlensystem ein Normalsystem ist. B ist daher der eine Zentramantel einer der Orthogonalflächen des Strahlensystems, die abgeleitete B_1 der andere; und die Brennlinsen von B und B_1 sind geodätische Linien (§ 25). B_1 heißt die Komplementärfläche von B und die Transformation (1) die Komplementärtransformation. Geometrisch erhält man die B_1 aus B , wenn man auf B eine Schar geodätischer Linien, die sich im Endlichen nicht schneiden, konstruiert und auf den Tangenten dieser vom Berührungspunkt ein konstantes Stück $= 1$ abträgt. Da nun der eine Endpunkt jeder dieser Strecken der eine Hauptkrümmungsmittelpunkt, der andere Endpunkt der zweite Hauptkrümmungsmittelpunkt der Orthogonalflächen des Strahlensystems

¹⁾ Vgl. S. S. XIII, Schlesinger, Differentialgleichungen, II. Kapitel.

ist, so sieht man, daß diese Orthogonalflächen lauter W -Flächen mit der Gleichung

$$R_1 - R_2 = 1$$

sind. Vgl. hierzu § 31 Schluß.

Wir müssen, um die unserem Buche gesteckten Grenzen nicht zu überschreiten, es uns versagen, auf die Transformationstheorie der Flächen konstanten positiven Krümmungsmaßes einzugehen. Wir verweisen in dieser Hinsicht den Leser auf die schönen und interessanten Untersuchungen in dem Bianchischen Werke (Bianchi-Lukat, II. Aufl. 1910, S. 487 ff.).

§ 33. Übungsaufgaben.

1. Man beweise die Sätze:

a) Auf einer Fläche von konstantem Krümmungsmaß und nur auf einer solchen entsprechen (vgl. § 2, S. 8) den Asymptotenkurven der Fläche die Asymptotenkurven auf den beiden Mänteln der Zentrafläche (1, 2).

b) Nur für die beiden Mäntel der Zentraflächen derjenigen W -Flächen, welche durch die Gleichung

$$R_1 - R_2 = R \quad (R = \text{konst.})$$

definiert sind, entsprechen sich die Krümmungslinien. Die beiden Mäntel sind in diesem Falle Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß $= -\frac{1}{R^2}$. Die Asym-

ptotenkurven der beiden Mäntel entsprechen sich nicht nur [vgl. § 2 Satz 1], sondern entsprechende Bogen solcher Asymptotenkurven sind auch gleich lang (1, 31, 32).

2. Man zeige, daß jeder Zentramantel einer Fläche von konstantem negativem Krümmungsmaß auf das Katenoid abwickelbar ist (2, 9).

3. Man bestimme diejenige Rotationsfläche, auf welche die Zentramäntel der Minimalflächen abwickelbar sind (2).

4. Man stelle nach § 1, Schluß die endlichen Gleichungen aller Minimalflächen her.

Anleitung. Vergleicht man das Linienelement der Kugel § 1, (25) mit dem Ausdruck Rk . u. Fl. II. § 8, (16), so muß nach den Erörterungen in II. § 8 $u + iv$ eine Funktion von α und $u - iv$ eine

Funktion von β sein oder umgekehrt. Beide Fälle sind nicht wesentlich verschieden. Man setze daher

$$(I) \quad u + iv = f(\alpha), \quad u - iv = \varphi(\beta); \quad du + i dv = f'(\alpha) d\alpha; \quad du - i dv = \varphi'(\beta) d\beta.$$

Setzt man diese Werte in (25), § 1 ein, so folgt durch Vergleich mit II. § 8, (16)

$$(II) \quad \frac{w^2}{2} = -R_2 = R_1 = f'(\alpha)\varphi'(\beta) \frac{(1 + \alpha\beta)^2}{8}.$$

Es ist nun nach § 1, (24)

$$(III) \quad -dx = R_1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} du - \frac{\partial \alpha}{\partial v} dv \right).$$

Man führe jetzt vermittelt (I) in (III) die Minimalparameter α , β ein; es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial u} &= \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} \frac{1}{f'(\alpha)} + \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{1}{\varphi'(\beta)}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} &= \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} \frac{i}{f'(\alpha)} - \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{i}{\varphi'(\beta)}, \\ du &= \frac{f'(\alpha) d\alpha + \varphi'(\beta) d\beta}{2}, \quad dv = \frac{f'(\alpha) d\alpha - \varphi'(\beta) d\beta}{2i}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte unter Benutzung von (II) in (III) ein, so folgt, wenn man noch $\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}$ aus II. § 8, (17) entnimmt:

$$-dx = \frac{f'(\alpha)^2}{8} (1 - \alpha^2) d\alpha + \frac{\varphi'(\beta)^2}{8} (1 - \beta^2) d\beta.$$

Man setze endlich

$$-\frac{f'(\alpha)^2}{4} = F(\alpha), \quad -\frac{\varphi'(\beta)^2}{4} = \Phi(\beta),$$

und es folgt

$$x = \frac{1}{2} \int (1 - \alpha^2) F(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int (1 - \beta^2) \Phi(\beta) d\beta.$$

Verfährt man mit y und z ebenso, so erhält man genau die Weierstraßschen Formeln § 4, (10).

5. Man zeige, daß eine Minimalfläche dadurch auf die Ebene konform abgebildet wird, daß man dem Flächenpunkt (u, v) § 4, (10) den Punkt (ξ, η) der Ebene durch die Formeln

$$u = \xi + i\eta, \quad v = \xi - i\eta$$

zuordnet (4).

Bemerkung. Nach II. § 11 überzeugt man sich leicht, daß man das Bild des Minimalflächenpunkts (u, v) in der $\xi\eta$ -Ebene dadurch

erhält, daß man das sphärische Bild von (u, v) auf die $\xi\eta$ -Ebene stereographisch projiziert.

6. Ebenso vermitteln die Gleichungen

$$\xi + i\eta = \int \sqrt{F(u)} du, \quad \xi - i\eta = \int \sqrt{\Phi(v)} dv$$

eine konforme Abbildung der Minimalfläche auf die Ebene. Man zeige, daß sich hierbei die Krümmungslinien als Parallelen zu den Koordinatenachsen, die Asymptotenlinien als Parallelen zu den Halbierungslinien der Achsenwinkel abbilden (4).

7. Man zeige, daß auf jeder Minimalfläche die Krümmungslinien und die Asymptotenlinien je ein Isothermen-system bilden (Aufg. 6) (vgl. § 1, Satz 3).

8. Ordnet man für zwei beliebige Minimalflächen jedem Punkt P der einen Fläche den Punkt P_1 der anderen zu, der dasselbe sphärische Bild wie P besitzt, so gilt der Satz: Teilt man die Verbindungsstrecken PP_1 entsprechender Punkte in konstantem Verhältnis, so ist der Ort der Teilpunkte Q wieder eine Minimalfläche, wobei Q dasselbe sphärische Bild wie P und P_1 hat (4).

9. Man zeige, daß die Wendelfläche die einzige Regelfläche ist, die zugleich Minimalfläche ist (Catalan).¹⁾

Anleitung. Da die Erzeugenden Asymptotenlinien sind, so sind die Orthogonaltrajektorien dieser ebenfalls Asymptotenlinien, die Erzeugenden sind aber auch geodätische Linien, die Orthogonaltrajektorien sind daher geodätisch parallel, nach Aufgabe 7 aber auch isotherm, also nach II. § 22, Aufg. 40 auch von konstanter geodätischer Krümmung. Außerdem ist längs der Orthogonaltrajektorien das Krümmungsmaß konstant (vgl. II. § 22, Aufgabe 41). Da nun nach II. § 19, (5), (7) (für $L = 0$) für die Asymptotenlinien die absolute Krümmung gleich der geodätischen Krümmung, diese aber für die Orthogonaltrajektorien konstant ist, so ist für jede dieser der Krümmungsradius konstant. Nach dem Satz von Enneper (I. § 28, Aufgabe 17, a) ist weiter das Quadrat der absoluten Torsion für eine Asymptotenlinie gleich dem negativen Krümmungsmaß. Die Orthogonaltrajektorien sind daher auch Kurven konstanter Torsion und daher Schraubenlinien (I. § 9, S. 36, Zusatz). Die Erzeugenden sind die Hauptnormalen dieser, womit der Beweis erledigt ist.

Kürzer wäre folgender Beweis. Die Orthogonaltrajektorien haben alle dieselben Hauptnormalen, nämlich die Erzeugenden. Jetzt zeigt man mit Hilfe der Gleichungen von Frenet leicht, daß die Orthogonaltrajektorien Schraubenlinien sind. Zu einem rein geometrischen Beweis könnte man auch den Satz 1 des § 7 benützen: e_1 und e_2 seien

¹⁾ E. Catalan, J. de math. (1) 7 (1842); p. 203.

zwei konsekutive Erzeugende; man drehe nun die Fläche um e_2 um π , dann geht e_1 in e_3 über. Jetzt drehe man um e_3 usw. Man sieht so leicht ein, daß alle Erzeugenden den kürzesten Abstand von e_1 und e_2 rechtwinklig schneiden und daß e_3 mit e_2 denselben Winkel bildet wie e_2 mit e_1 usw.

10. Den Krümmungslinien der zu der Minimalfläche S assoziierten Fläche S' entsprechen auf S die isogonalen Trajektorien der Krümmungslinien für den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ (Mit Hilfe von Aufgabe 6) (6).

11. Ennepersche¹⁾ Minimalfläche (4 ff.) In § 4, (10) setze man $F(u) = 3$, worauf man mit $u = \alpha + i\beta$, $v = \alpha - i\beta$ folgende Flächengleichungen in den Parametern α, β erhält

$$x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3; \quad y = -3\beta - 3\alpha^2\beta + \beta^3, \\ z = 3\alpha^2 - 3\beta^2.$$

Dies ist die einfachste algebraische Minimalfläche, die sogenannte Ennepersche Minimalfläche. Man beweise folgende Sätze:

a) Die Fläche hat die Ordnung 9, sie wird also von einer beliebigen Geraden in neun Punkten getroffen.

b) Die Geraden $\{z=0, x=y\}$, $\{z=0, x=-y\}$ liegen ganz auf der Fläche und sind Symmetrieachsen derselben.

c) Die Krümmungskurven sind die Kurven $\alpha = \text{konst.}$ und $\beta = \text{konst.}$, es sind ebene Kurven vom Geschlecht Null. Die Ebenen der Krümmungslinien haben zu Gleichungen

$$x + \alpha z - 3\alpha - 2\alpha^3 = 0, \quad y + \beta z + 3\beta + 2\beta^3 = 0.$$

d) Die sphärischen Bilder der Krümmungslinien bilden zwei Scharen von Kreisen. Die Ebenen dieser gehen alle durch zwei in einem Kugelpunkt aufeinander senkrecht stehende Tangenten.

e) Die Gleichungen der Asymptotenlinien lauten

$$\alpha + \beta = \text{konst.}, \quad \alpha - \beta = \text{konst.};$$

es sind Raumkurven dritter Ordnung.

¹⁾ Enneper, Zeitschrift f. Math. Bd. IX. p. 108 (1864) und Gött. Nachr. 1882. p. 40.

f) Die Ennepersche Fläche ist auf eine Rotationsfläche abwickelbar.

g) Die assoziierten Flächen der Fläche stimmen alle der Gestalt nach überein und ergeben sich aus der Urfläche dadurch, daß diese um die z -Achse gedreht wird.

h) Gegeben seien die beiden Parabeln (Fokalparabeln)

$$(I) \quad x = 4a, \quad y = 0, \quad z = 2a^2 - 1.$$

$$(II) \quad x = 0, \quad y = -4\beta, \quad z = -2\beta^2 + 1.$$

Verbindet man irgend einen Punkt (a) von (I) mit einem beliebigen Punkt (β) von (II) und errichtet auf der Verbindungslinie die Mittellotebene, so umhüllen diese Ebenen alle die Ennepersche Minimalfläche (Darboux, 1. Bd., S. 318).

12. Wählt man auf zwei adjungierten Minimalflächen zwei einander entsprechende geodätische Linien, so ist die Krümmung der einen in jedem Punkte gleich der Torsion der andern im entsprechenden Punkte [Bianchi, Giorn. di mat. 22 (1884) p. 374] (6, 7).

Anleitung. Seien

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

die Gleichungen der geodätischen Linie auf S , s ihr Bogen, l, m, n die Richtungskosinus der Hauptnormalen, dann erhält man für die Koordinaten x_0, y_0, z_0 , der entsprechenden Linie auf S_0 nach § 7, (4)

$$dx_0 = \left(m \frac{dz}{ds} - n \frac{dy}{ds} \right) ds = (m\gamma - n\beta) ds = -\lambda ds$$

[vgl. I. § 4, (2) und Einleitung (14)]. Es ist also

$$x_0 = -\int \lambda ds, \quad y_0 = -\int \mu ds, \quad z_0 = -\int \nu ds.$$

Das übrige ist vollends einfach.

13. Man bestimme diejenige Minimalfläche, welche einen Kreis als geodätische Linie besitzt.

Man hat nach § 7 zu verfahren und erhält leicht das Katenoid.

14. Man betrachte die Flächenschar

$$z = \Re \left[e^{-ia} F(x + iy) \right],$$

wo a ein veränderlicher Parameter ist. (Das Zeichen „ \Re “ bedeutet, daß man von der Funktion den reellen Teil nehmen soll.) Jedem a entspricht eine Fläche. Nennt

man die Flächen assoziierte P -Flächen¹⁾ und zwei Flächen deren Parameterwerte sich um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden adjungierte, so beweise man die Sätze:

a) Die assoziierten P -Flächen sind flächentreu aufeinander abgebildet.

b) Die assoziierten P -Flächen haben in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß, sind aber trotzdem nicht aufeinander abwickelbar.

c) Die Tangentialebene in einem Punkt (x, y) der P -Fläche, welche dem Parameterwerte a entspricht, ist gegen die Tangentialebene der Fläche mit dem Parameterwerte a_1 im entsprechenden Punkt um die Verbindungslinie der zwei entsprechenden Punkte um den Winkel $a - a_1$ gedreht. *adjungierte*

d) Die sphärischen Bilder der assoziierten P -Flächen sind kongruent.

e) Die Projektionen der Niveaulinien $z = \text{konst.}$ einer von zwei adjungierten P -Flächen auf die xy -Ebene sind die Projektionen der Falllinien (= Orthogonaltrajektorien der Niveaulinien) der anderen und umgekehrt.

f) Die Gleichungen der Asymptotenkurven der P -Flächen erhält man durch Quadratur. Dieselben entsprechen den Asymptotenkurven einer Schar assoziierter Minimalflächen.

g) Die Projektionen der Asymptotenkurven jeder assoziierten P -Fläche auf die xy -Ebene bilden ein isometrisches Kurvensystem.

h) Die Projektionen der Asymptotenlinien von zwei adjungierten P -Flächen auf die xy -Ebene bilden vier Kurvensysteme, die sich überall unter einem Winkel von $\frac{\pi}{4}$ schneiden.

Anleitung. Setzt man $F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, so ist bekanntlich

$$(I) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

¹⁾ Wegen dieser Flächen vgl. K. Kommerell, „Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen“. Math. Annal. Bd. 60. 1905. S. 582. Die Sätze (a) und (b) stellen Erweiterungen der von Dini für zwei adjungierte P -Flächen gefundenen Sätze dar (Dini, Giorn. di. mat. 3 (1865), p. 78.).

und die Flächenschar hat zu Gleichungen

$$(II) \quad x = x, \quad y = y, \quad z = u \cos \alpha + v \sin \alpha,$$

wo also x, y die Parameter (sonst u, v) sind. Man erhält nun durch einfache Rechnung

$$E = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha \right)^2, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha \right)^2,$$

$$F = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha \right).$$

Das Linienelement ist also nicht unabhängig von α (vgl. b). Für das Flächenelement dJ hat man

$$dJ = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} dx dy = \Delta dx dy.$$

Für das Krümmungsmaß k erhält man

$$k = - \frac{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2}{\Delta^4}.$$

dJ und k sind unabhängig von α (s. Aufg. a und b). Für die Richtungskosinus a, b, c der Normalen folgt

$$a\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha, \quad b\Delta = \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha, \quad c\Delta = -1. \text{ Man}$$

beachte, daß c von α unabhängig ist.

Zum Beweis der Sätze f) — h) setze man

$$(III) \quad \sigma = x + iy, \quad \sigma_1 = x - iy$$

und erhält, wenn Φ die zu F konjugierte Funktion ist, als Flächen-
gleichungen

$$(IV) \quad x = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}, \quad y = -i \frac{(\sigma - \sigma_1)}{2}, \quad z = \frac{1}{2} \left\{ e^{-i\alpha} F(\sigma) + e^{i\alpha} \Phi(\sigma_1) \right\}.$$

Rechnet man die Fundamentalgrößen D, D', D'' aus, so erhält man als Differentialgleichung der Asymptotenlinien

$$(V) \quad e^{-i\alpha} F''(\sigma) d\sigma^2 + e^{i\alpha} \Phi''(\sigma_1) d\sigma_1^2 = 0.$$

Dies ist aber nach § 4, (18) die Differentialgleichung derjenigen Minimalfläche, die man erhält, wenn man in den Weierstraßschen Gleichungen $F(u)$ durch $e^{-i\alpha} F''(\sigma)$ ersetzt. Aus den Gleichungen dieser Aufgabe und nach Aufgabe (5) schließt man nun unschwer, daß man zu dem Minimalflächenpunkt (σ, σ_1) die Projektion auf die xy -Ebene des entsprechenden Punkts der P -Fläche dadurch erhält, daß man das sphärische Bild des Minimalflächenpunkts stereographisch auf die xy -Ebene projiziert. Die Projektion der P -Fläche auf die xy -Ebene ist daher ein konformes Bild der zugehörigen Minimalfläche. Man erhält jetzt leicht den Beweis der Sätze (g) und (h).

Bemerkung. Die P -Flächen bilden ein gutes Beispiel dafür, daß zwei aufeinander bezogene Flächen noch nicht aufeinander abwickelbar sein müssen, auch wenn in entsprechenden Punkten die Krümmungsmaße gleich groß sind (vgl. Satz b und II. §13, Satz 2. Anm.).

15. Besitzt eine auf einer Regelfläche gezogene Kurve zwei der drei folgenden Eigenschaften: a) geodätische Linie, b) Striktionslinie zu sein, c) die Erzeugenden unter konstanten Winkel zu schneiden, so besitzt sie auch die dritte (15).

Anleitung. Man berechne nach Rk. u. Fl. II. § 19, (53) die geodätische Krümmung der Direktrix.

16. Die Normalen in den Punkten einer Erzeugenden einer Regelfläche bilden ein hyperbolisches Paraboloid (15). (Auch geometrisch einfach.)

17. Man bringe das Linienelement einer Regelfläche auf die Form $ds^2 = du^2 + \{(u - \alpha)^2 + \beta^2\} dv^2$, wo die Kurven $v = \text{konst.}$ die Erzeugenden und α, β Funktionen von v allein sind. Man zeige, daß $u = \alpha$ die Gleichung der Striktionslinie ist. Bezeichnet man ferner den Winkel, den die Tangentenebene im Zentralpunkt $u = \alpha$ einer Erzeugenden v (d. h. die Zentralebene) mit der Tangentenebene im Punkte u derselben Erzeugenden bildet, mit ω ,

so ist $\operatorname{tg} \omega = \frac{u - \alpha}{\beta}$ (Chasles¹⁾ (15).

Anleitung. Man nehme als Direktrix eine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden und setze daher in § 15, (4) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Nimmt man weiter als Parameter v den Bogen der sphärischen Indikatrix, so ist nach § 15, (5) $A = 1$ zu setzen. Das übrige ist einfach.

Bemerkung. Ist wie in § 15 $d\varphi$ der Winkel zweier konsekutiver Erzeugenden, $d\sigma$ ihr Minimalabstand, so nennt man die Größe [vgl. § 15, (5) und (7)]

$$P = \frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{\sqrt{A \sin^2 \vartheta - B^2}}{A}$$

den Verteilungsparameter und ihren reziproken Wert

$$S = \frac{1}{P}$$

die Schränkung. Nimmt man $d\sigma$ als konstant an, so ist die Schrän-

¹⁾ Chasles, „Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite“, Corresp. math. et phys. de Quetelet, t. XI (1839).

kung für diejenige Erzeugende am größten, welche mit der im Abstand $d\sigma$ benachbarten den größten Winkel $d\varphi$ bildet.

Aus dem Beweisgange für die Aufgabe (17) geht nun hervor, daß β der Verteilungsparameter ist. Ist also U der Abstand des Berührungspunkts der Tangentenebene vom Zentralpunkt und ω der Winkel dieser Ebene und der Zentralebene, so lautet jetzt die Formel von Chasles einfach

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{U}{P} = U \cdot S.$$

Man sieht, daß von dem „Verteilungsparameter“ P die „Verteilung“ der durch die Erzeugende gehenden Tangentenebenen abhängt.

Die Chaslessche Formel beweist man übrigens leicht, wie folgt, geometrisch. (Wir bitten den Leser, zum Folgenden eine Figur zu machen.) Die Erzeugende v sei die z -Achse, der Zentralpunkt auf ihr der Ursprung O , der kürzeste Abstand $d\sigma$ zwischen ihr und der konsekutiven Erzeugenden $v + dv$ falle in die y -Achse, dann geht die Erzeugende $v + dv$ parallel zur xz -Ebene und trifft die y -Achse in einem Punkt Q . Es ist jetzt $OQ = d\sigma$. Ist P ein beliebiger Punkt der z -Achse und $OP = U$, so lege man durch P die Parallelebene zur xy -Ebene: diese möge die Erzeugende $v + dv$ im Punkt Q_1 und die durch Q parallel zur z -Achse gezogene Gerade in Q_2 treffen. Es ist jetzt die Ebene POQ_1Q_2 die Zentralebene und die Ebene OPQ_1 die Tangentenebene in P und daher der Winkel $Q_1PQ_2 = \omega$. Weiter ist der Winkel $Q_1QQ_2 = d\varphi$, und, weil $QQ_2 = U$ ist, $Q_1Q_2 = U \operatorname{tg} d\varphi = U d\varphi$. Aus dem bei Q_2 rechtwinkligen Dreieck

$$Q_1Q_2P \text{ folgt nun } \operatorname{tg} \omega = \frac{Q_1Q_2}{Q_2P} = \frac{U d\varphi}{d\sigma}, \text{ also } \operatorname{tg} \omega = \frac{U}{P}, \text{ w. z. b. w.}$$

18. Jede Ebene durch eine Erzeugende einer Regelfläche berührt die Fläche in einem Punkte P_1 der Erzeugenden und steht in einem Punkte P_2 dieser auf der Fläche senkrecht. Dreht sich diese Ebene um die Erzeugende, so geben P_1 und P_2 eine Involution, deren Zentrum der Zentralpunkt ist (mit Hilfe von 17).

Geometrisch zeigt man dies leicht so: durch drei konsekutive Flächenerzeugende g_1, g_2, g_3 ist ein Hyperpoloid bestimmt, das längs g_2 mit der Fläche alle Tangentenebenen gemein hat. Nun gilt der Satz, wie leicht gezeigt wird, für jedes Hyperboloid, also auch für die Fläche.

19. Man berechne für das Linienelement in Aufgabe (17) das Krümmungsmaß k . Man erhält so

$$k = \frac{-\beta^2}{[(u - \alpha)^2 + \beta^2]^2} \quad (15).$$

Hieraus folgert man, daß das Krümmungsmaß längs jeder Erzeugenden, für die $\beta \geq 0$ ist, im Zentralpunkt sein Maximum hat und der Null sich nähert, je weiter man sich von demselben entfernt.

20. Die Striktionslinie des einmantligen Rotationshyperboloids ist der Kehlkreis (15).

21. Die Striktionslinie einer jeden Schar der Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids ist eine Parabel (15).

22. Man suche alle Regelflächen, die sich auf die Wendelfläche $x = u \cos \frac{v}{e}$, $y = u \sin \frac{v}{e}$, $z = v$ abwickeln lassen. Man zeige, daß die Erzeugenden der verbogenen Fläche stets die Binormalen einer Kurve mit der konstanten Torsion $= \frac{1}{e}$ sind (16).

Anleitung. Die z -Achse ist die Direktrix der Wendelfläche und die Erzeugenden schneiden die Direktrix senkrecht. Die verbogene Direktrix muß deshalb eine geodätische Linie der verbogenen Fläche sein und von den Erzeugenden ebenfalls senkrecht geschnitten werden. Die Erzeugenden sind somit die Binormalen der verbogenen Direktrix. Man stelle nun die Bedingung auf, daß das Linienelement der Regelfläche, deren Erzeugenden die Binormalen einer beliebigen Raumkurve sind, mit dem Linienelement der Wendelfläche identisch wird. Mit Hilfe der Formeln von Frenet (I. § 6) erhält man nun unschwer das genannte Resultat.

23. Man suche die Differentialgleichung der Asymptotenlinien einer Regelfläche (15).

Anleitung. Man berechne die Größen D , D' , D'' und findet $D = 0$. Die eine Schar von Asymptotenlinien besteht daher aus den Erzeugenden. Für die andere Schar erhält man eine Riccatische Differentialgleichung. Da das Doppelverhältnis von vier partikulären Integralen einer solchen Differentialgleichung konstant ist, so ergibt sich leicht der Satz: Die Schar der Erzeugenden einer Regelfläche wird von der zweiten Schar der Asymptotenlinien in projektiven Punktreihen geschnitten (man vgl. das einschalige Hyperboloid).

24. Trägt man auf jedem Strahl eines isotropen Strahlensystems vom Mittelpunkt aus nach beiden Seiten gleiche konstante Stücke ab, so erhält man zwei aufeinander abwickelbare Flächen (Ribaucour, vgl. die Fußnote S. 113) (26).

25. Ein Strahlensystem, bei dem beide Brennflächen zusammenfallen, besteht aus den Tangenten der einen Schar von Asymptotenkurven der Brennfläche. Ist d der Abstand der Grenzpunkte, k das Krümmungsmaß der Brennfläche im Berührungspunkt des Strahls, so ist

$$d = \frac{1}{\sqrt{-k}} \quad (21 \text{ ff.}).$$

Anleitung. Als Leitfläche nehme man die Brennfläche, als Parameterkurven die im Satz genannte Schar von Asymptotenkurven sowie die Orthogonaltrajektorien dieser und berechne jetzt die Kummerschen Fundamentalgrößen des Strahlensystems.

26. Auf einer beliebigen Fläche sei ein konjugiertes System (u, v) gegeben. Man betrachte das Strahlensystem, das aus den Tangenten aller Parameterkurven $u = \text{konst.}$ gebildet wird. Die gegebene Fläche ist der eine Brennflächenmantel. Man berechne nun für jeden Strahl die Abszisse ϱ des zweiten Brennpunkts, sowie den Winkel Ω der beiden Brennebenen (21 ff.).

Anleitung. Sind X, Y, Z die Richtungskosinus des Strahls (u, v) , so ist nach II. § 1,

$$X\sqrt{G} = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Y\sqrt{G} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad Z\sqrt{G} = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Jetzt berechne man die Kummerschen Fundamentalgrößen unter Benutzung der Gleichungen II. § 2, (23). Man erhält dann

$$\varrho = -\frac{\sqrt{G}}{p'}, \quad \sin \Omega = \frac{\sqrt{G} D''}{\sqrt{p''^2 \Delta^2 + D''^2 G}}, \quad \cos \Omega = \frac{p'' \Delta}{\sqrt{p''^2 \Delta^2 + D''^2 G}}. \quad 1)$$

27. Unter den Voraussetzungen der vorigen Aufgabe drücke man das Krümmungsmaß der gegebenen Fläche im Punkte (u, v) durch die Größen ϱ, Ω und ihre Abgeleiteten nach u und v aus. Man findet so

$$k = -\left\{ \frac{\sin^2 \Omega}{\varrho^2} + \frac{\sin^2 \Omega}{\varrho^2} \frac{\partial \varrho}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{G}} + \frac{D''}{\Delta \sqrt{G}} \frac{\partial \Omega}{\partial u} \right\}. \quad 1)$$

Anleitung. Mit Hilfe der Gleichungen II. § 17, (3) und II. § 1, (25) zeige man, daß k sich durch folgende Gleichung darstellen läßt.

$$k = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\Delta p''}{G} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\Delta p'}{G} \right) \right\}.$$

Entnimmt man aus den Resultaten der vorhergehenden Aufgabe p'' und p' und berücksichtigt die Codazzischen Gleichungen, so folgt nach leichter Rechnung das Ganze.

Die Berwaldsche Formel ist bemerkenswert, da sie für $\Omega = \text{konst.}$, $\varrho = \text{konst.}$ den Satz 1 des § 31 über pseudosphärische Systeme gibt.

1) Vgl. L. Berwald „Krümmungseigenschaften der Brennflächen eines geradlinigen Strahlensystems usw.“ Diss. München 1909.

28. Auf ein Paraboloid (ellipt. oder hyperb.) mögen Strahlen parallel der Achse einfallen und an denselben reflektiert werden. Man zeige, daß das reflektierte Strahlensystem zu Brennflächen zwei Fokalparabeln hat.¹⁾ Nach Aufgabe (11. h) ist die Mittelenveloppe des reflektierten Systems die Ennepersche Minimalfläche (21 ff.).

Anleitung. Das Paraboloid habe zu Gleichungen

$$x = u, \quad y = v, \quad 2z = \frac{u^2}{R_1} + \frac{v^2}{R_2},$$

wobei R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien im Scheitel sind. α, β, γ seien die Richtungskosinus des einfallenden Strahls (also hier $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$), der die Fläche im Punkt (x, y, z) trifft, a, b, c die der Flächennormalen und w der Winkel des einfallenden Strahles gegen die Flächennormale (also hier $\cos w = c$), so ergeben sich ähnlich wie in § 22 als Gleichungen des reflektierten Systems

$$\xi = x + t(\alpha - 2a \cos w),$$

$$\eta = y + t(\beta - 2b \cos w),$$

$$\zeta = z + t(\gamma - 2c \cos w).$$

Nun berechne man die Kummerschen Fundamentalgrößen und dann die Abszissen der Brennpunkte, was keine Schwierigkeit verursacht. Endlich stelle man die Gleichung der Brennflächen auf und findet dann, daß dieselben sich auf folgende zwei Fokalparabeln reduzieren:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = v \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right), \quad z_1 = \frac{v^2}{2R_2} \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{R_1}{2},$$

$$x_2 = u \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right), \quad y_2 = 0, \quad z_2 = \frac{u^2}{2R_1} \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_2}{2},$$

oder nach Elimination von u bzw. v .

$$y_1^2 = (2z_1 - R_1)(R_2 - R_1), \quad x_2^2 = (2z_2 - R_2)(R_1 - R_2).$$

Setzt man speziell $R_1 - R_2 = 4$ und verschiebt beide Parabeln um $1 + \frac{R_2}{2}$ parallel zur positiven z -Achse, so gehen sie in die Parabeln (I) und (II) der Aufgabe 11 über.

29. Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier konfokalen Flächen zweiten Grads bilden ein Normalsystem (Chasles) (vgl. I. § 26, Satz 8.) (22).

Anleitung. Die Brennflächen sind die beiden gegebenen Flächen; man zeige nun, daß die Brennebenen aufeinander senkrecht

¹⁾ Vgl. V. Kommerell, „Eine optische Eigenschaft des Paraboloids“. Math. natwiss. Mittlg. d. math. natwiss. Ver. in Württ. Ser. II. Bd. VI. S. 79.

stehen (§ 25, vgl. auch I. § 26, Satz 8). Degenerieren beide konfokale Flächen in Kegelschnitte (Fokalkegelschnitte), so besteht das Strahlensystem aus der Gesamtheit der Strahlen, welche beide treffen. Wir überlassen es dem Leser zu zeigen, daß auch in diesem Falle das Strahlensystem ein Normalensystem ist. (Vgl. den Fall der Fokalparabeln in Aufgabe 28.) Als nützliche Übung empfehlen wir noch die Gleichungen der Orthogonalflächen für diesen Fall aufzustellen; diese Flächen sind besonders deshalb interessant, weil beide Scharen von Krümmungslinien aus Kreisen bestehen — es sind die in II. § 5 betrachteten Zykliden. Für diese sind die beiden Zentramäntel in Kurven degeneriert.

30. Satz (von Guichard). Haben die abwickelbaren Flächen eines Strahlensystems dasselbe sphärische Bild wie die Asymptotenkurven einer Fläche S , so entspricht die Mittelfläche des Strahlensystems der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente.

Anleitung. Der Beweis ist ganz analog dem für den Satz 3 des § 30 gegebenen. Man hat dabei die Gleichungen (11) des § 28 zu benutzen.

31.¹⁾ Der Punkt Q , in dem der kürzeste Abstand dp der zwei konsekutiven Strahlen g und g' eines Strahlensystems den Strahl g trifft und die Ebene durch g und dp mögen der Zentralpunkt und die Zentralebene von g bezüglich g' heißen. (Vgl. die analoge Bezeichnung für die Regelflächen S. 70f.). Q ist ein Punkt der Striktionslinie für jede Regelfläche des Strahlensystems, welche g und g' enthält. Diese Regelflächen berühren sich in allen Punkten von g , da sie in jedem die Tangentenebenen gemein haben. Die Tangentenebene im Punkte Q ist die Zentralebene und die Tangentenebene in jedem anderen Punkt von g bestimmt sich nach der Formel von Chasles (vgl. Aufg. 17)

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{U}{P},$$

wo U die Abszisse des Berührungspunkts vom Zentralpunkt aus gemessen, ω den Winkel der Tangentenebene und der Zentralebene und P den Verteilungspara-

¹⁾ Für das Folgende vgl. Sannia, „Geometria differenziale delle congruenze rettilinee“, Math. Annal. Bd. 68 (1910), S. 409ff, sowie die ebenda zitierten weiteren Arbeiten von S., weiter Zindler, „Liniengeometrie mit Anwendungen“, S. S. LI, Bd. 2. (1906) § 22. Die Aufgabe (31) ist eine fast wörtliche Übersetzung des § 2 und § 3 der erstgenannten Arbeit von Sannia.

meter bedeutet. Es ist dabei nach den Bezeichnungen des § 21

$$P = \frac{dp}{ds_0}$$

und die Schränkung S der reziproke Wert von P (vgl. Aufg. 17). Führt man nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\bar{D} = \frac{1}{\Delta_0} (DF_0 - E_0 D'_1), \quad 2\bar{D}' = \frac{1}{\Delta_0} [DG_0 + (D' - D'_1)F_0 - D''E_0],$$

$$\bar{D}'' = \frac{1}{\Delta_0} (D'G_0 - F_0 D''), \quad \Delta_0 = \sqrt{E_0 G_0 - F_0^2},$$

so hat man nach § 21, (21) für die Schränkung S der beiden konsekutiven Strahlen (u, v) und $(u + du, v + dv)$

$$\frac{1}{S} = \frac{\bar{D} du^2 + 2\bar{D}' du dv + \bar{D}'' dv^2}{E_0 du^2 + 2F_0 du dv + G_0 dv^2}.$$

Dieser Ausdruck für S entspricht dem für die Krümmung der Normalschnitte einer Fläche in einem ihrer Punkte [vgl. II. § 3, (18)] und führt daher zu analogen Betrachtungen. Die Schränkung S ist konstant (unabhängig von $\frac{du}{dv}$) für alle die Strahlen, für welche

$$\bar{D} : \bar{D}' : \bar{D}'' = E_0 : F_0 : G_0$$

ist, sie mögen „Kreisstrahlen“ heißen. In jedem anderen Fall ändert sich die Schränkung mit dem Verhältnis von

$\frac{du}{dv}$; ändert sich $\frac{du}{dv}$, d. h. nimmt man statt des zu g be-

nachbarten Strahls g' einen andern benachbarten, so dreht sich die Zentralebene um g , während der Zentralkpunkt zwischen den Grenzpunkten von g hin und her wandert; die Schränkung erreicht insbesondere einen Maximal- und Minimal-Wert, welche wir die Hauptschränkungen

$\frac{1}{S_1}$ und $\frac{1}{S_2}$ nennen. Von Wichtigkeit sind die beiden symmetrischen Funktionen

$$K = \frac{1}{S_1 S_2}, \quad H = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2},$$

welche das Schränkungsmaß bzw. die mittlere Schränkung heißen mögen. Man erhält

$$K = \frac{\bar{D}\bar{D}'' - \bar{D}'^2}{E_0 G_0 - F_0^2}, \quad H = \frac{E_0 \bar{D}'' - 2 F_0 \bar{D}' + G_0 \bar{D}}{E_0 G_0 - F_0^2},$$

vgl. II. § 3, (15), (16). Man hat weiter die Formel

$$\frac{1}{S} = \frac{\cos^2 \omega}{S_1} + \frac{\sin^2 \omega}{S_2},$$

wo ω der Winkel ist, den die dem Werte S entsprechende Zentralebene mit derjenigen für den Wert S_1 bildet. Vergleicht man diese Formel mit der bekannten Eulerschen Formel I. § 18, (16), so kommt man folgendermaßen zum Begriffe der Indikatrix:

In einem beliebigen Punkt C des Strahls g konstruiere man die Ebene Π senkrecht zu g und betrachte in dieser Ebene die Spuren der durch g gehenden Zentralebenen. Auf jeder dieser Spuren trage man ein Stück $CP = \sqrt{S}$ ab und erhält so als Ort der Punkte P die Indikatrix. Sie ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem

$K \gtrless 0$ ist; dementsprechend heißt der Strahl elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch. Die parabolischen Strahlen bilden eine Regelfläche ($K=0$), welche die elliptischen von den hyperbolischen trennt. Nennt man Hauptschränkungsflächen die Regelflächen des Strahlensystems, deren Zentralebenen aus der Ebene Π eine Achse der Indikatrix ausschneiden, so sieht man, daß in jedem Strahlensystem stets zwei reelle¹⁾ Scharen von Hauptschränkungsflächen existieren. Ihre Differentialgleichung lautet

$$\begin{vmatrix} \bar{D} du + \bar{D}' dv & \bar{D}' du + \bar{D}'' dv \\ E_0 du + F_0 dv & F_0 du + G_0 dv \end{vmatrix} = 0.$$

1) H. Sannia spricht a. a. O. von „orthogonalen“ Scharen von Hauptschränkungsflächen. Dies könnte den Schein erwecken, als ob die beiden durch g gehenden Flächen in jedem Punkt von g aufeinander senkrecht stehen, während sie dies nur im Mittelpunkt von g tun; denn sonst müßte der Verteilungsparameter nach dem Chasleschen Satz (Aufg. 17) für die beiden Flächen denselben Wert besitzen, was ausgeschlossen ist, wenn g nicht ein Kreisstrahl ist.

Sind u, v die Parameter der Hauptschränkungsflächen, so muß $F_0 = 0$, $\bar{D}' = 0$ sein. Man zeigt leicht, daß die Zentralpunkte von g bezüglich der beiden durch g gehenden Hauptschränkungsflächen zusammenfallen, und zwar in den Mittelpunkt des Strahls (als Leitfläche nehme man die Mittelfläche und als Parameter u, v die Parameter der Hauptschränkungsflächen).

Wir nennen asymptotische Flächen die Regelflächen, deren Zentralebenen aus der Ebene Π die Asymptoten der Indikatrix ausschneiden: ihre Differentialgleichung ist

$$\bar{D} du^2 + 2\bar{D}' du dv + \bar{D}'' dv^2 = 0.$$

Sind u, v die Parameter der asymptotischen Flächen, so muß $\bar{D} = \bar{D}' = 0$ sein. Man sieht leicht ein, daß die asymptotischen Flächen mit den abwickelbaren Flächen identisch sind. Wir nennen endlich Medianflächen diejenigen Regelflächen, deren Zentralebenen aus der Ebene Π die Medianen des Achsenwinkels der Indikatrix ausschneiden. Die Medianflächen bilden ein zweifach unendliches stets reelles System von Regelflächen. Die Zentralpunkte für die beiden durch g gehenden Medianflächen sind nichts anderes als die Grenzpunkte.

Die Normalensysteme können nunmehr als diejenigen Strahlensysteme bezeichnet werden, für welche die mittlere Schränkung H für alle Strahlen gleich Null ist; die isotropen sind diejenigen, für welche alle Strahlen Kreisstrahlen sind oder für welche die Indikatrix für jeden Strahl ein Kreis ist.

Register.

(Die Zahlen bedeuten die Seiten.)

A.

Abbildung, konforme der pseudosphärischen Flächen auf die Halbebene 62 ff.; durch reziproke Radien im Raum 82 ff.; — der Minimalflächen auf die Ebene 153 ff.; mit Orthogonalität der Elemente 115.
Abwickelbare Flächen 53, 71; eines Strahlensystems 106 ff.
Adjungierte Minimalflächen 29, 31; — P-Flächen 157.
Assoziierte Minimalflächen 28 ff.; — P-Flächen 157.
Asymptotenlinien der Minimalflächen 21; — der Mittelfläche eines isotropen Strahlensystems 125.
Asymptotische Flächen eines Strahlensystems 167.

B.

Bäcklund'sche Transformation 145 ff.
Beltrami 58 ff.; —sche Abbildung 68; — Satz über Normalsysteme 99.
Berwald 162.
Bianchi 115, 152, 156.
Björlingsche Aufgabe 32.
Bolyai 58.
Bonnet 32.
Brechung eines Strahlensystems 99 ff.
Brennebenen 108.

Brennflächen 109 ff., 127 ff.; — eines W-Strahlensystems 126.
Brennlinien 109 ff.
Brennpunkte 107 ff.

C.

Catalan 154.
Chasles 159, 163.
Cykliden 87 ff.

D.

Darboux 99, 115, 156.
Deformation der Minimalflächen 22 ff., 27 ff.; — der Regelflächen 72 ff.; — infinitesimale 114.
Dini 157.
Dreieck, geodätisches 49 ff.
Dreifach orthogonale Flächensysteme 75 ff.; Fundament McGrößen 77 ff.
Dupin, Satz über dreifach-orthogonale Flächensysteme 80; —sche Cykliden 87 ff.; Malus-Dupin'scher Satz 96 ff.

E.

Elliptischer Typus des Linienelements einer pseudosphärischen Fläche 47.
Engel 56, 57.
Enneper 12; —sche Minimalfläche 155 ff., 163.
Enriques 56.
Entsprechen zweier Flächen mit

Orthogonalität der Elemente 115.

Euklid 57 ff.

F.

Flächen von konstantem Krümmungsmaß 35 ff.; Abwicklung der — auf sich selbst 37; auf Rotationsflächen 38; Geometrie auf — 38.

Fundamentalgrößen eines Strahlensystems 93.

G.

Gauß 57.

Geodätisches Dreieck 49 ff.; Winkelsumme im — 53.

Geodätische Kreise 48 ff., 65 ff.

Geodätische Krümmung 42; Kurven konstanter — auf pseudosphärischen Flächen 43 ff.

Grenzgerade 63 ff.

Grenzkreise 46.

Grenzpunkte 103 ff.

Guichard 129, 164; —sche Strahlensysteme 136 ff.; — Flächen 139 ff.; Satz von G. 141.

H.

Halphenscher Satz 9.

Hamilton 91; —sche Gleichung 106, 108.

Harzer 61.

Hauptebenen 106.

Hauptflächen 104.

Hauptschränkungen 165.

Hauptschränkungsflächen 166.

Helmholtz 62.

Hilbert 59.

Hyperbel-Funktionen 37.

Hyperbolischer Typus des Linienelements der pseudosphärischen Flächen 45.

I.

Indikatrix, sphärische 70; — eines Strahlensystems 166.

Infinitesimale Deformation 114.

Inversion 82 ff.

Isotrope Strahlensysteme 104, 113 ff.; Konstruktion der — 122 f.

K.

Katenoid 11 f., 41.

Klein 58, 60, 62.

Komplementärtransformation 151 f.

Konforme Abbildung der pseudosphärischen Flächen auf die Halbebene 62 ff.; — des Raumes auf sich selbst 82 ff.; — der Minimalflächen auf die Ebene 153 f.

Krümmungsmaß, Flächen von konstantem — 35 ff.

Kreisstrahlen 165.

Kummer 91; Fundamentalgrößen von K. 93.

Kürzester Abstand unendlich benachbarter Geraden 70, 92, 96.

L.

Lagrange 11.

Lambert 57.

Lamé 77; Gleichungen von — 80 ff.

Légendre 57.

Lie 13, 16, 17.

Lobatschewskij 57 ff.

M.

Malus 90; — Dupin'scher Satz 99 ff.

Medianflächen 167.

Meusnier 12.

Minimalflächen 1, 11 ff.; Geschichte 11 ff.; Differentialgleichung 13 ff.; Gleichungen von Monge 17; von Weierstraß 19; — sind Translationsflächen 17 f.; reelle — 19; algebraische — 20; Fundamentalgrößen 20 f.; sphärisches Bild 21; Asymptotenlinien, Krümmungslinien 21; Verbiegung 22, 27; zugleich

Schraubenflächen 24f.; assoziierte — 28; adjungierte — 29, 31; — durch gegebenen Streifen 32; — sind Mittelenveloppen von Strahlensystemen 121f.; — konforme Abbildung auf die Ebene 153f.

Minimalkurven 18f.

Mittelebene 121.

Mittelenveloppe eines Strahlensystems 121f.; — eines isotropen Strahlensystems 121; — eines Guichardschen Strahlensystems 142.

Mittelfläche eines allgemeinen Strahlensystems 108; eines isotropen Strahlensystems 120ff.; Asymptotenlinien derselben 125.

Mittelpunkt eines Strahls 108.

Mittlere Schränkung 166.

N.

Nichteuklidische Geometrie 56ff.

Normalensystem 96ff.; Malus-Dupinscher Satz 99f.

O.

Optik, geometrische 99ff.

Orthogonalität der Elemente, Entsprechen durch — 115.

P.

Parabolischer Typus das Linienelements einer pseudosphärischen Fläche 45.

Parallelen auf Flächen von konstantem Krümmungsmaß 54ff.

Parallelenpostulat 57.

Parallelitätswinkel 56.

P-Flächen 157ff.

Plateau 13.

Poincaré 62.

Pseudosphäre 38ff., 54f.; Verbiegung auf sich selbst 42.

Pseudosphärische Flächen

43ff.; konforme Abbildung auf die Halbebene 62ff.

Pseudosphärische Geometrie 59ff.

Pseudosphärische Strahlensysteme 143ff.;

Ptolemäus 57.

R.

Reflexion eines Strahlensystems 99ff.

Regelflächen 68ff.; Linienelement 69; Richtkegel 70; Striktionslinie 71; Deformation 72ff.

Reziproke Radien 82ff.

Ribaucour 8, 13, 113, 121, 125, 134, 161.

Richtkegel einer Regelfläche 70.

Riemann 13, 58ff.

Rotationsflächen von konstantem Krümmungsmaß 38f.

S.

Saccheri 57.

Sannia 164.

Scherk 26.

Schränkung 159, 165; mittlere — 166.

Schränkungsmaß 166.

Schwarz 13; Formeln von — 32.

Schwarzschild 62.

Sphärische Abbildung der Minimalflächen 21; — eines Strahlensystems 92.

Sphärische Indikatrix 70.

Stäckel 56.

Strahlensysteme (Strahlenkongruenzen) 90ff.; Fundamentalgrößen 93f.; sphärische Abbildung 92; Grenzpunkte 103ff.; Hauptebenen 106; Isotrope — 104, 113ff.; Abwickelbare Flächen 106ff.; Brennpunkte 107ff.; Brennflächen 109ff., 127ff.; — von Weingarten 126, 134. — von Waelsch

135. — von Guichard 136ff.;
pseudosphärische — 143ff.
Striktionslinie einer Regel-
fläche 71.

T.

Traktrix 40f.

Translationsflächen 17f.

Trigonometrie auf den Flächen
von konstantem Krümmungs-
maß 49ff.;

U.

Unendlichkleine Verbiegung
114; — der Kugel 115; — der
pseudosphärischen Flächen 141.

V.

Verbiegung s. Deformation.

Verteilungsparameter 159,
164.

Voßsche Flächen 140ff.

W.

Waelsch, Strahlensysteme von
— 135.

Weingarten 1; Satz von 10;
—sche Flächen (*W*-Flächen) 1ff.;
Linienelement 3, sphärisches
Bild 3ff.; Zentrafläche 7ff.; —
sche Strahlensysteme (*W*-Strah-
lensysteme) 126, 134.

Weierstraß 12; Formeln von
— für Minimalflächen 19.

Wendelfläche 12, 27, 154, 161.

Winkelsumme eines geodäti-
schen Dreiecks 53f.

Z.

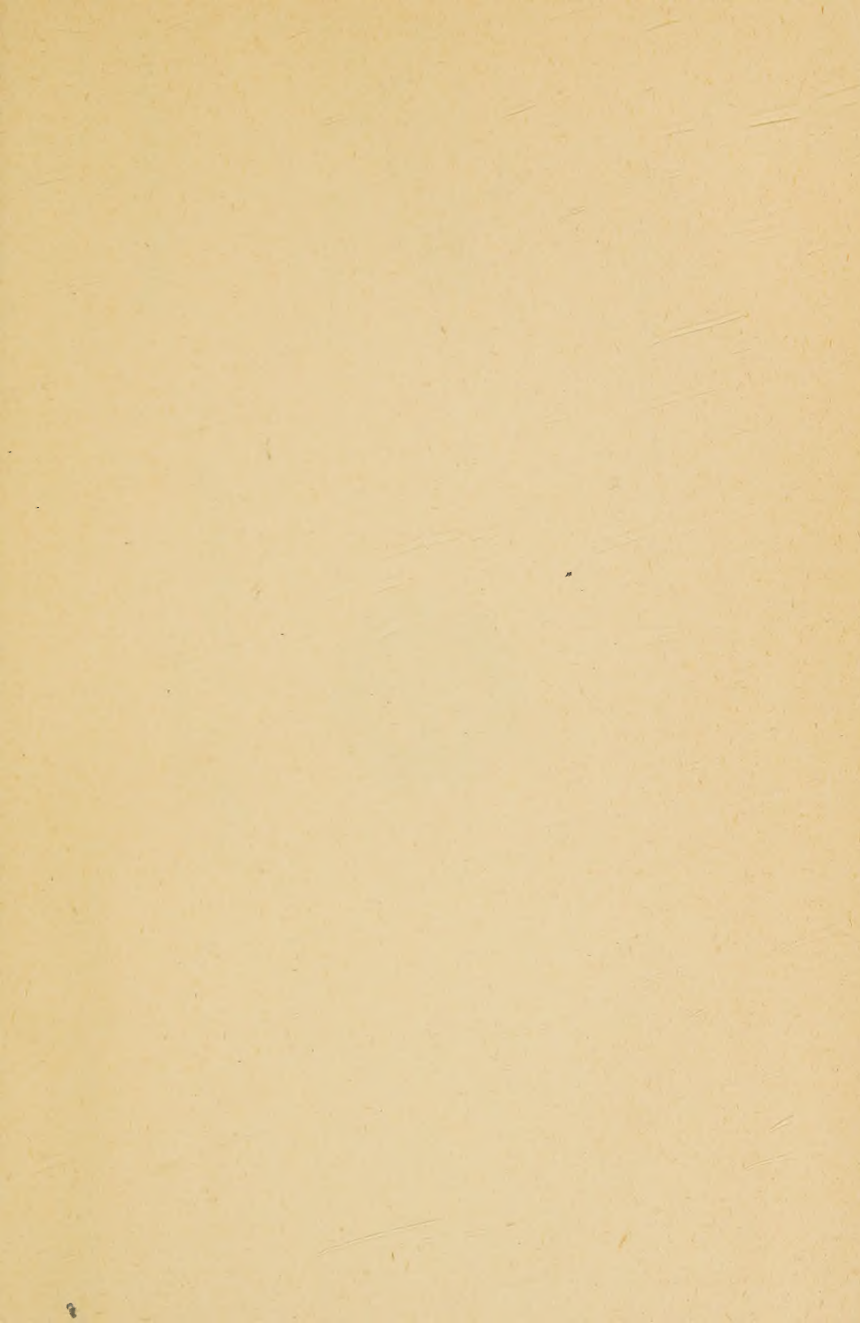
Zentraflächen einer *W*-Fläche
7ff.; Krümmungsmaß 9; Linien-
element 9f.; auf Rotations-
flächen abwickelbar 10.

Zentralebene (Regelfläche) 71;
(Strahlensystem) 164.

Zentralpunkt (Regelfläche)
70f.; (Strahlensystem) 164.

Zindler 91, 164.





516.7
K812

6 7 K815

MMERELL V SPEXIELLE FLSCHEN UND THE

INSERT BOOK
MASTER CARD
FACE UP IN
FRONT SLOT
OF S.R. PINCH



UNIVERSITY OF ARIZONA
LIBRARY

MASTER CARD

GLOBE 901144-0

